Probabilidad y Estadística

Propedeútico, Maestría en Ingeniería iIndustrial

M. en C. Juan Carlos Gutiérrez Matus

Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Otoño 2013

Agenda

Agenda

1. Estadística Descriptiva
   - Definiciones
   - Descripción Tabular
   - Descripción Numérica
   - Descripción Gráfica

¿Qué es la estadística descriptiva?

Definición

La ***estadística descriptiva*** *es la rama de la estadística dedicada a la descripción, síntesis y análisis de una muestra a través de gráficos y parámetros numéricos, sin pretender generalizar las conclusiones a la población o a otras muestras.*

Conceptos clave

Población

Llamamos **población** a un conjunto bien definido de elementos que son objetos de estudio. Puede ser finita o infinita.

Individuo

También llamada **unidad estadística**, se refiere a cada uno de los elementos de una población.

Muestra

Una **muestra** es un subconjunto de individuos de una población.

Conceptos clave

Variables

Una **variable** es una característica o atributo a estudiar de una población y que puede cambiar de uno individuo a otro. Pueden ser cualitativas o cuantitativas.

Dato

Un **dato** es una medición o valor específico que una variable toma sobre un individuo en particular.

Observación

Consideramos una **observación** al valor de todas las variables de un individuo.

Variables

Variable cualitativa

Tambien llamado *atributo*, ubica a cada individuo dentro de una categoría. Por lo regular se denotan con las primeras mayúsculas del abecedario $(A, B, C, \ldots)$.

Variable cuantitativa

También llamada *variable estadística*, asigna un número real a cada individuo; denotándose con las últimas letras mayúsculas del abecedario $(\ldots, X, Y, Z)$.

- Las variables cuantitativas pueden ser *discretas* o *continuas* dependiendo de la naturaleza de los números asignables.

Variables cuantitativas

Cuantitativas discretas

Cuando no admiten siempre una modalidad intermedia entre dos cualesquiera de sus modalidades. Esto hace que la cantidad de valores que se le puedan asignar a un individuo sea finita o contablemente infinita.

Cuantitativas continuas

Continuas, cuando admiten una modalidad intermedia entre dos cualesquiera de sus modalidades. Esto hace que la cantidad de valores que se le puedan asignar a un individuo sea incontablemente infinita.

Ejemplos

Continuas

- Tiempo de espera de llamada entrante.
- Temperatura media/hr
- Minuto para subir al avión.
- Cantidad de gasolina en el tanque.
- Anchura del chip.
- Costo unitario.

Discretas

- Número de llamadas que esperan más 30s.
- Horas con temp $> 18^{o}$C.
- Retrasos al abordar el avión
- Tanque vacío/lleno.
- Chips, cumplimiento de especificaciones.
- Uds cuyo costo $>$ plan.

Continuas vs discretas

- Preferible registrar continuas; ya que proporcionan más información sobre la verdadera variación del proceso.
- Las continuas se pueden convertir a discretas.
- Discretas son más fáciles de recolectar e interpretar, pero más probable que se pierda información relevante.

Frecuencias

Definición (Frecuencia)

La frecuencia es el número de veces que se repite un dato dentro de una muestra.

- Consideremos una muestra de n individuos cuyos datos se refieren a las observaciones de la variable X, la cual puede tomar p valores o clases diferentes denotados por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$.

Clasificación frecuencias

- La **frecuencia absoluta** (n_i) será el número de individuos cuya observación presenta el valor correspondiente x_i.
- La **frecuencia relativa** (f_i) es simplemente la fracción correspondiente de individuos que presentan el valor x_i.

$$f_i = \frac{n_i}{n} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, p$$

Frecuencias acumuladas

- **Frecuencia absoluta acumulada** N_i, es el número de individuos de la muestra cuyo valor o clases es inferior o equivalente a x_i:

$$N_i = n_1 + n_2 + ... + n_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$$

- **Frecuencia relativa acumulada** , F_i, es la proporción de individuos de la muestra que están en alguna clase inferior o igual a x_i.

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

Distribución de frecuencias

- Los posibles valores que puede tomar una variable junto con sus respectivas frecuencias se le denomina **distribución de frecuencias** de una variable.
- Dicha distribución puede presentarse en forma tabular para organizar y resumir la información contenida en un conjunto de datos.

Representación tabular

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frec. absoluta acumulada	Frec. relativa acumulada
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	f_k	$N_k = n$	$F_k = 1$
	n	1		

Clases o intervalos

- Cuando se trata de una variable cuantitativa discreta y el numero de valores es muy grande o en el caso de una variable continua, es conveniente trabajar con datos agrupados.
- Entonces, una **clase** será cada intervalo en que se agrupan los datos.
- Para ello se definirá un límite inferior L_I y uno superior L_S de clase.
- La **marca de clase** es el punto medio del intervalo

$$m_i = \frac{L_S - L_I}{2}$$

Representación tabular

Clase o intervalo	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frec. absoluta acumulada	Frec. relativa acumulada
$(L_0, L_1]$	m_1	n_1	f_1	N_1	F_1
$(L_1, L_2]$	m_2	n_2	f_2	N_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(L_{k-1}, L_k]$	m_k	n_k	f_k	$N_k = n$	$F_k = 1$
		n	1		

Descripción Numérica

- Tendencia Central
  - Media
  - Mediana
  - Moda
- Posición
  - Cuartiles
  - Percentiles
- Dispersión
  - Rango
  - Varianza
  - Desviación Estándar
  - Coeficiente de Variación
  - Rango Intercuartílico
- Forma
  - Sesgo
  - Curtosis

Media Muestral

- Es la medida de tendencia central más común y útil.
- La media de la muestra $\bar{x}$ es simplemente el promedio del valor de las observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que pertenecen a la muestra.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Mediana

- Es otra medida, cuyo propósito es el reflejar la tendencia central de la muestra sin que intervengan los valores extremos.
- La palabra *mediana* es sinónimo de "medio", así la mediana de la muestra es el observación de en medio.
- Si $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ representan las observaciones acomodadas en orden creciente , entonces la mediana de la muestra es

$$\tilde{x} = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{si } n \text{ es impar.} \\ \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Medias Generalizadas

- En función del tipo de problema varias generalizaciones de la media pueden ser consideradas.
- Media geométrica.

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}$$

- Media armónica.

$$\bar{x}_a = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Moda

- Es el valor con mayor frecuencia.
- Si hay más de una, la variable se dice multimodal y puede calcularse para cualquier tipo de variable.
- Si los datos están agrupados hablamos de clase modal y será aquella para la que el cociente frecuencia relativa dividido entre amplitud (f_i/c_i) es mayor.

Cuartiles

- Dividen a la muestra ordenada en 4 partes.

  Q_1: es el primer cuartil, representa el valor que al menos el 25% de los datos son menores o iguales que él y al menos el 75% de los datos son mayores o iguales que él.

  Q_2: es el segundo cuartil igual a la mediana.

  Q_3: es el tercer cuartil, representa el valor que al menos el 75% de los datos son menores o iguales que él y al menos el 25% de los datos son mayores o iguales que él.

Percentiles

- Dividen la muestra ordenada en 100 partes.
- Dado $k = \{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq 99\}$.
- Entonces el k-ésimo percentil P_k es un valor tal que al menos el k% de los datos son menores o iguales que él.
- Para calcular el percentil P_k, buscamos en la columna de las frecuencias relativas acumuladas el primer valor mayor o igual que $k/100$.
- ¿Cuál es la relación entre percentiles y cuartiles?

Rango y rango intercuartílico

- El **rango**, también llamado recorrido, es la diferencia entre la observación más grande y la más pequeña.

$$Rango = x_{(n)} - x_{(1)}$$

- El **rango intercuartílico** es la diferencia entre el tercer y primer cuartil, representa el rango del 50% de los datos centrales.

$$RIC = Q_3 - Q_1$$

Varianza

- La dispersión de las observaciones se mide a través de la *varianza muestral*. Es denotada por s^2 y esta dada por

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- El único problema con la varianza, es que arroja unidades cuadradas.

Desviación estándar

- Por lo cual en muchas ocasiones es más significativo el calcular la *desviación estándar de la muestra*, que simplemente es la raíz cuadrada de la varianza.
- Es denotada por la letra s y esta dada por

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Coeficiente de Variación

- Cuando deseamos comparar dos muestras, en ocasiones no coinciden las unidades en que se efectuaron las observaciones.
- En otros casos las unidades son las mismas pero la diferencia de medias muestrales es muy grande y la comparación de la dispersión no es proporcional.
- En dichos casos el **coeficiente de variación** permite elimina la dimensionalidad de las variables y tiene en cuenta la proporción existente entre medias y desviación estándar.

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

Sesgo

- El sesgo mide el grado de asimetría de la distribución de frecuencias de una variable.
- También se conoce como coeficiente de asimetría.
- Se basa en el tercer y segundo momento central

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^3$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2$$

- Se determina como:

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$$

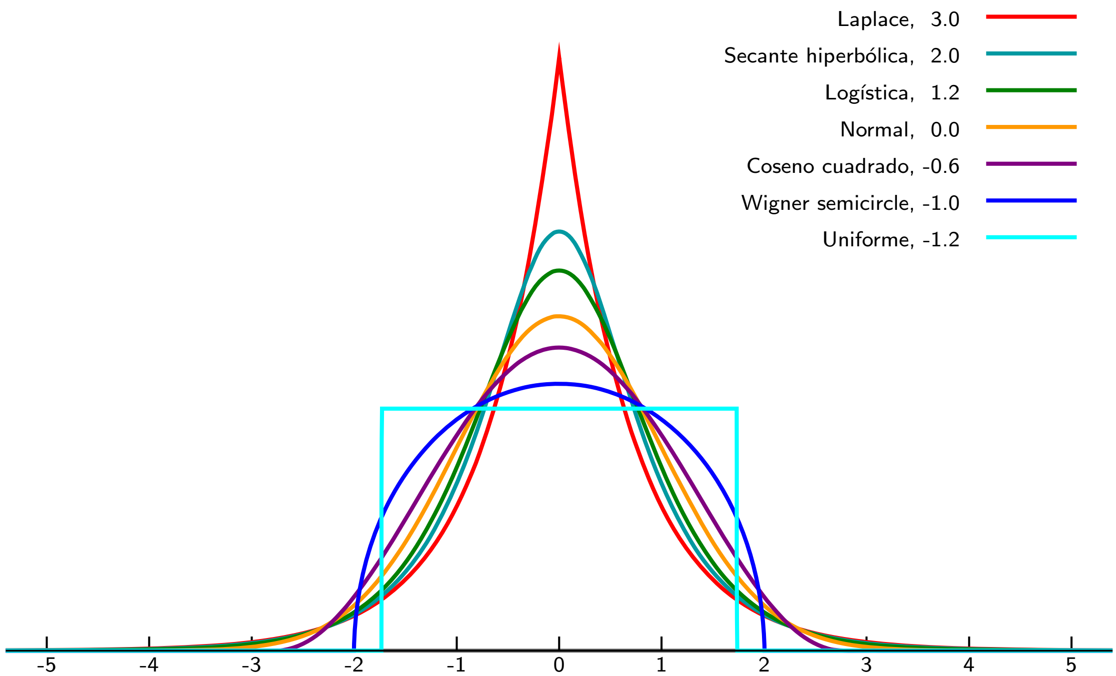
- Si el conjunto de datos es simétrico tiene un sesgo igual a cero cero.

Curtosis

- La curtosis es una medida de lo “picudo” (concentrada en torno a la media) de la distribución de frecuencias de una variable.
- Se basa en el cuarto y segundo momento central, y se determina como:

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)^2} - 3$$

Curtosis



Descripción Gráfica

"The greatest value of a picture is when it forces us to notice what we never expected to see."

Tuckey 1977

¿Para qué y Porqué?

- Organizar los datos
- Observar patrones
- Observar agrupamientos
- Observar relaciones
- Comparar distribuciones
- Visualizar rápidamente la distribución de los datos
- Visualizar, obtener y comparar medidas estadísticas

Diagrama de barras

- Se usa tanto para variables cualitativas como para variables discretas no agrupadas por intervalos.
- En un eje colocamos las modalidades (si es cualitativa) o los valores (si es discreta).
- Sobre cada uno de estos valores se levanta una barra (o rectángulo) de igual base, cuya altura sea proporcional a la frecuencia.

Diagrama de barras

Causas vs Número de Muerte

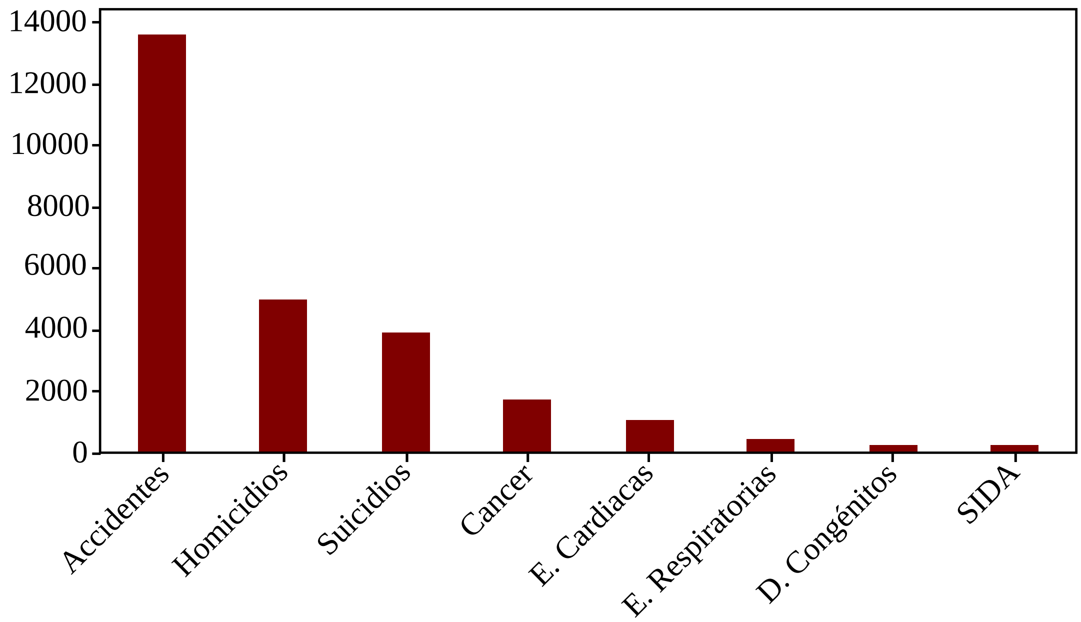
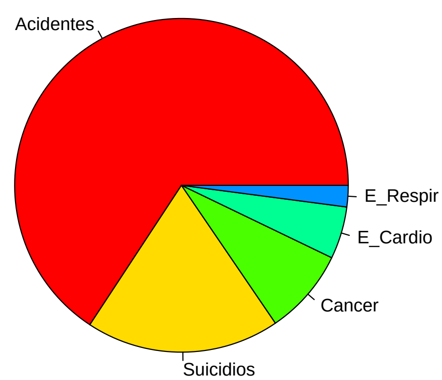


Diagrama de sectores

- Se divide un círculo en tantas porciones como clases existan, de modo que a cada clase le corresponde un arco de círculo proporcional a su frecuencia absoluta o relativa.
- El arco de cada porción se calcula.

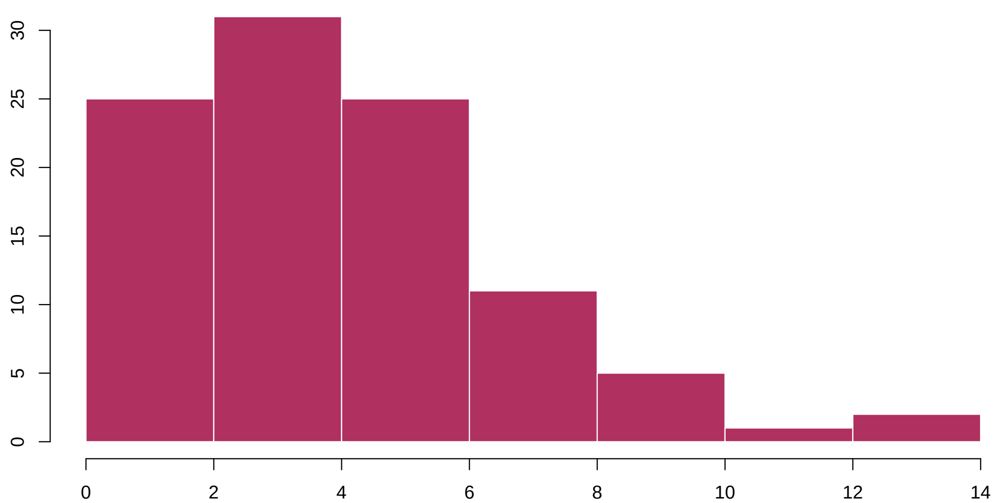
$$arco_i = \frac{360^o \times n_i}{n}$$



Histograma

- Es la representación gráfica de la distribución de frecuencias de variables cuantitativas cuyos datos han sido agrupados.
- Sobre el eje de las abscisas se marcan los límites de intervalos o clases.
- Se levanta para cada clase, un rectángulo que tiene como base la amplitud del intervalo.
- La altura de los rectángulos debe ser proporcional a la frecuencia absoluta o relativa del intervalo correspondiente.

Histograma



Polígonos de frecuencia

- A partir de un histograma se une la parte superior de las barras en la marca de clase.

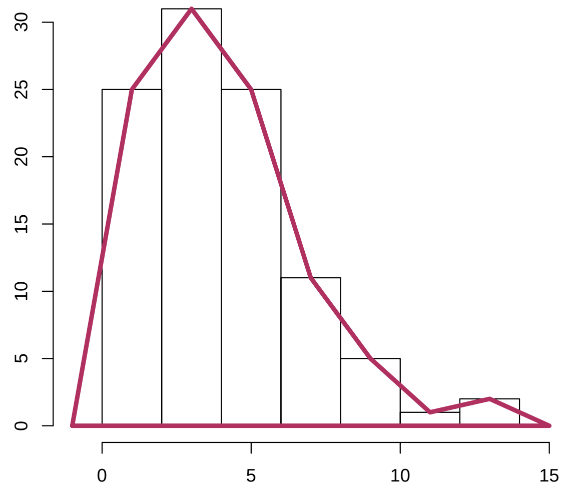


Diagrama de tallo y hoja

- Parecido al histograma pero es capaz mantener parte de la información sobre las observaciones.
- Suponga que tenemos un conjunto de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_i tiene al menos dos dígitos:
  1. Seleccionar dígitos iniciales para el tallo.
  2. Enlistar los valores de tallo en una columna.
  3. Registrar la hoja por cada observación junto a su valor correspondiente de tallo.
  4. Indicar las unidades.

Diagrama de tallo y hoja

23	62	91	83	82	64	73	94	94	52
67	11	87	99	37	62	40	33	80	83
99	90	18	73	68	75	75	90	36	55

1	18
2	3
3	367
4	0
5	25
6	22478
7	3355
8	02337
9	0014499

tallo: decenas
hoja: unidades

Diagrama de caja

- Este resumen gráfico describe varias de las más destacadas características de un conjunto de datos, tales como:
  - centro
  - dispersión
  - naturaleza y magnitud los sesgos
  - identificación de puntos inusuales
- Para evitar el efecto de puntos inusuales este diagrama esta basado en una medida de dispersión llamada *rango intercuartílico*

Diagrama de caja

1. Dibujar eje.
2. Marcar una caja de Q_1 a Q_3.
3. Dividir la caja en la mediana.
4. Marcar lineas desde los extremos de la caja, hasta la observación que esté a un máximo de $1.5RIC$ de la caja.
5. Dibujar un circulo abierto para identificar cada observación que caiga entre $1.5RIC$ y $3RIC$, estos serán puntos inusuales suaves.
6. Dibujar un circulo relleno para identificar cada observación que caiga a más de $3RIC$, puntos inusuales extremos.

Diagrama de caja

Ejercicio

- Construya el diagrama de caja para el siguiente conjunto de datos.

2.68	3.06	4.31	4.71
5.71	5.99	6.06	7.04
7.17	7.46	7.50	8.27
8.42	8.73	8.84	9.14
9.19	9.21	9.39	11.28
15.19	21.06		

Agenda

Probabilidad

- La probabilidad proporciona una descripción matemática de lo aleatorio.
- Un fenómeno aleatorio puede ser descrito matemáticamente a través de sus patrones a largo plazo.
- La teoría de probabilidad abarca el estudio y desarrollo de metodologías para describir las variaciones aleatorias en un sistema.

Modelos matemáticos

Un modelo es una representación simbólica de un fenómeno observable, desarrollado con el fin de estudiarlo mejor.

Modelos Determinísticos

En los que se pueden manipular los factores que intervienen en su estudio con el propósito de predecir sus resultados.

Modelos Probabilísticos

En los cuales hay incertidumbre en los factores involucrados.

Modelos Probabilísticos

- La demando de un bien o servicio para el próximo año.
- Micos seleccionando acciones aleatoriamente en el mercado de valores, pudieron rebasar el rendimiento de la mayoría de los analistas el año pasado.
- Si hay 23 personas en el salón, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos una coincidencia en sus cumpeaños? y ¿si hay 50?

Experimento Aleatorio

Definición

Un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado es revelado solo al término del experimento, dado que éste no se puede predecir.

- Es un concepto fundamental en la teoría de probabilidad.
- La teoría de probabilidad estriba en generar los medios que proporcionen la probabilidad de cualquier resultado, ó de un conjunto de resultados.
- La teoría de probabilidad es una herramienta para explicar los fenómenos aleatorios en la naturaleza.

Espacio Muestral

Definición

El espacio muestral (Ω) asociado a un experimento aleatorio, es el conjunto exhaustivo de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Ejemplo

Si el experimentos aleatorio consiste en lanzar un dado; entonces su espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Espacio Muestral

Ejemplo (continuación)

Otro espacio muestral para el experimento anterior del dado, puede ser

$$\Omega' = \{par, non\}$$

- Ambos describen todos los posibles resultados del experimento.
- Por ello, podemos afirmar que el espacio muestral de un experimento aleatorio no tiene que ser único.
- Dependerá tanto de la naturaleza del experimento, como de las características que nos interese conocer de su resultado.

Puntos Muestrales

Definición

Un punto muestral (ω) es cada resultado completo de un experimento aleatorio bajo las consideraciones establecidas. También llamado resultado elemental o evento simple.

Ejemplo

Si el experimento consiste en lanzar tres monedas

$$\Omega = \{aaa, aas, asa, saa, ssa, sas, ass, sss\}$$

este Ω posee ocho puntos muestrales $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8$; pero si nos interesa el número de águilas que aparecen, etonces

$$\Omega' = \{3, 2, 1, 0\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

Eventos

Definición

Un evento es un conjunto de posibles resultados, esto es, cualquier subconjunto del espacio muestral Ω.

- Son denotados por letras mayúsculas $A, B, \ldots$
- Para denotar que un punto muestral pertenece a un evento: $\omega \in A$.

Ejemplo

Para el experimento de lanzar un dado, definimos un evento A como "un número par ocurre" entonces

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Eventos

Evento por Extensión: Es una forma de definir un evento; al enlistar los puntos muestrales que cubre.

$$A = \{-3, +3\}$$

Evento por Compresión: Otra forma de definir un evento, es el enunciar las propiedades de los resultados contenidos.

$$A = \{\omega \in \mathbb{R} | \omega^2 = 9\}$$

Evento Imposible: También llamdo evento vacío ya que no contiene ningún punto muestral, es cuando ningún resultado sucede y es denotado por el símbolo $\emptyset$.

Ejercicio

- Un ingeniero eléctrico tiene en su mano dos cajas de resistores, cada una con cuatro de éstos. Los resistores de la primera caja están etiquetados con 10 ohms, pero, de hecho, sus resistencias son de 9, 10, 11 y 12 ohms. Los resistores de la segunda caja tienen la etiqueta de 20 ohms, pero sus resistencias son de 18, 19, 20 y 21 ohms. El ingeniero elige un resistor de cada caja y determina la resistencia de cada uno.
- Sea A el evento para el cual el primer resistor tiene una resistencia mayor a 10, sea B el evento en el que el segundo resistor tiene una resistencia menor a 19 y sea C el evento en el cual la suma de las resistencias es igual a 28. Determine un espacio muestral para este experimento y especifique los subconjuntos que corresponden a los eventos A, B y C.

Álgebra de Eventos

- Ya que un evento es un conjunto de resultados, nos apoyaremos en la Teoría de Conjuntos para describir el comportamiento de los eventos.
- El concepto de conjunto es usado como evento.
- El de conjunto universal es análogo al de espacio muestral.
- Existen conjuntos comunes que recordaremos:

  $\mathbb{R}$: el conjunto de números reales, ó lo que es lo mismo $(-\infty, \infty)$.

  $\mathbb{Z}$: el conjunto de todos los números enteros.

  $\mathbb{N}$: el conjunto de los números enteros positivos.

Cardinalidad de un Evento

Definición

La cardinalidad de un evento es el número puntos muestrales que posee dicho evento. Es denotada por $|A|$.

Con base en su cardinalidad los eventos pueden ser clasificados en finitos e infinitos; y estos últimos a su vez en numerables e innumerables.

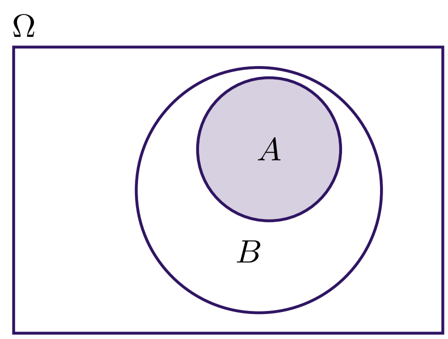
Ejemplos

Finito:	$A = \{6, 7, 8, 10\}$
Numerablemente infinito:	$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$
Innumerablemente infinito:	$C = \{\omega \in \mathbb{R} : 1 < \omega \leq 2\}$

Subevento

Definición

Para dos eventos A y B en Ω, si cada punto muestral que pertenece al evento A también pertenece a B, entonces podemos decir que A es un **subevento** de B.



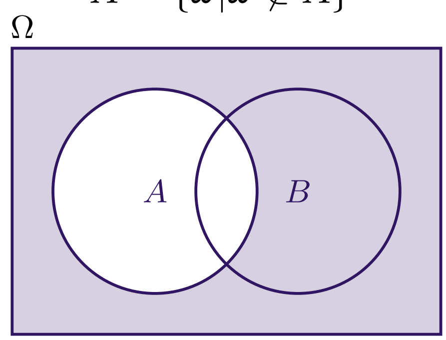
Nota: $\emptyset \subseteq A$; $A \subseteq \Omega$; $A \subseteq A$

Complemento

Definición

El **complemento** de A con respecto a Ω es es el conjunto de todos los puntos muestrales, que no pertenecen al evento A. Se denota como $\bar{A}$, ó también $(A)^c$.

$$\bar{A} = \{\omega | \omega \notin A\}$$

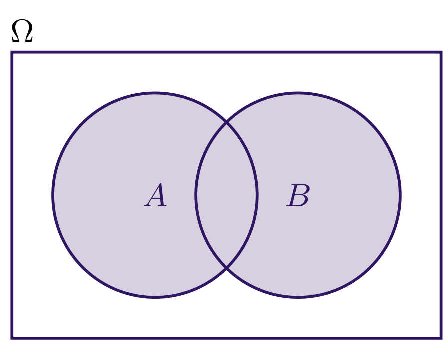


Unión

Definición

La **unión** de los eventos A y B está formada por todos los puntos muestrales que pertenecen ya sea al evento A ó al evento B ó a ambos eventos.

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

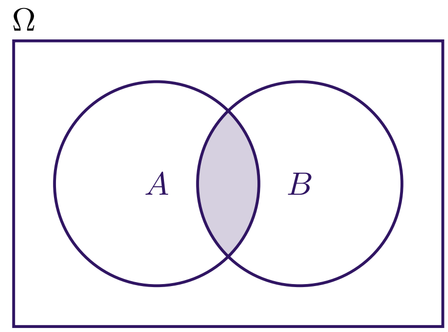


Intersección

Definición

La **intersección** de los eventos A y B es el evento formado por todos puntos muestrales que pertenecen al evento A y al mismo tiempo pertenecen al evento B.

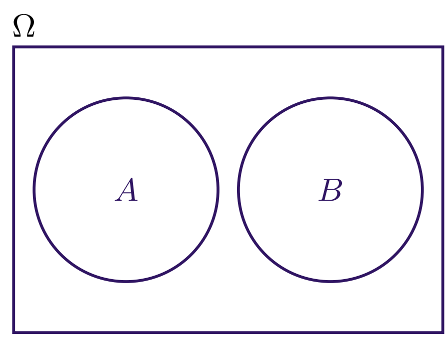
$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$



Mutuamente Excluyentes

Definición

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B son **eventos mutuamente excluyentes**. Esto es, que no existe punto muestral alguno que haga que sucedan ambos eventos al mismo tiempo.

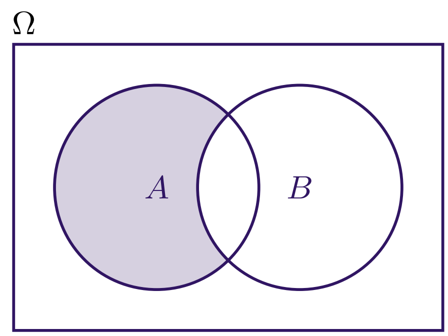


Diferencia

Definición

La diferencia del evento A menos el evento B, son todos los puntos que pertenecen al evento A y no al B.

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

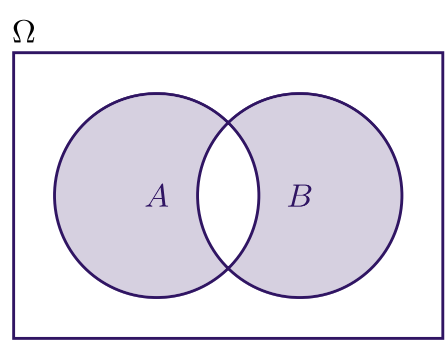


Diferencia Simétrica

Definición

La diferencia simétrica o XOR, está formada por los puntos muestrales que pertenecen exclusivamente a uno de los eventos.

$$A \triangle B \equiv (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$



Leyes del Álgebra de Eventos

Complemento

$$A \cup \overline{A} = \Omega; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset; \quad \overline{\overline{A}} = A; \quad \overline{\Omega} = \emptyset; \quad \overline{\emptyset} = \Omega$$

DeMorgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Conmutativas

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A$$

Leyes del Álgebra de Eventos

Asociativas

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Axiomas de Probabilidad I

Ley de Probabilidad

Para cada evento A del espacio muestral Ω, asociamos un número $\mathrm{P}(A)$, llamado probabilidad de A, satisfaciendo los siguientes axiomas.

Axioma 1: *No negatividad*

Para todo evento A del Ω su probabilidad es no negativa.

$$\mathrm{P}(A) \geq 0$$

Axioma 2: *Normalización*

La probabilidad de todo el espacio muestral Ω es igual a uno.

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1$$

Axiomas de Probabilidad II

Axioma 3: *Aditividad*

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces, la probabildiad de su unión está dada por

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Generalizando, para una sucesión de eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ entonces

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

Axiomas de Probabilidad III

Ejemplo: *Axioma 3*

Del experimento aleatorio de lanzar repetidamente una moneda hasta que aparezca la primera águila .

$$\Omega = \{a, sa, ssa, sssa, \dots\}$$

Se definen los eventos mutuamente excluyentes.

$$A_1 = \{a\},\ A_2 = \{sa\},\ A_3 = \{ssa\},\ \dots$$

Entonces:

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

Teoremas de Probabilidad I

Teorema 1

Para el evento vacío la probabilidad es nula

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0$$

Teorema 2

Para el complemento de un evento

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

Teorema 3

Para cualquier evento A y evento B del Ω

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

Teoremas de Probabilidad II

Teorema 4

Para tres eventos cualesquiera A, B y C de un mismo Ω

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ &\quad -\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) \\ &\quad +\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Teorema 5

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$$

Teorema 6

Para dos eventos cualesquiera de un mismo Ω

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

Ejercicio

La probabilidad de que un microcircuito esté defectuoso es 0.08. ¿Cuál es la probabilidad de que no presente defectos?

Ejercicio

Sesenta por ciento de las grandes compras hechas a un vendedor de computadoras son PC, 30% son portátiles y 10% son accesorios, como impresoras. Como parte de una auditoría, se elige una muestra aleatoria del registro de una compra.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de una computadora personal?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de una computadora personal o de una portátil?

Agenda

3 Probabilidad Clásica
- Conceptos Básicos
- Regla de la Multiplicación
- Permutaciones
- Combinaciones
- Regla de la Adición

Probabilidad Discreta

Ley de Probabilidad Discreta

Suponga que Ω es un espacio muestral finito, donde:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$$

Sea A un evento consistente de $r(< n)$ resultados, siendo

$$A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots, \omega_{ir}\}$$

Entonces.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{j=1}^{r} \mathrm{P}(\omega_{ij})$$

Probabilidad Discreta

Ejemplo

Si se tienen dos cartas rojas, una azul y una amarilla, y se selecciona una carta de forma aleatoria.

$$\Omega = \{rojo, azul, amarillo\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

$$\mathrm{P}(\omega_1) = \frac{1}{2}; \qquad \mathrm{P}(\omega_2) = \frac{1}{4}; \qquad \mathrm{P}(\omega_3) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(rojo\ o\ amarillo) = \mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_3) = \frac{3}{4}$$

Espacio Muestral Simple (EMS)

Definición

- Un EMS es un espacio muestral finito en el cual todos los puntos muestrales (resultados) son equiprobables (igualmente probables).

Ejemplo

- Para un experimento aleatorio que consiste en lanzar dos monedas:
- $\Omega = \{ss, sa, as, aa\}$ es un EMS.
- $\Omega' = \{0, 1, 2\}$ (no. de ágilas) no es un EMS. ¿Por qué?

Probabilidades en un EMS

Ley de Probabilidad Discreta Uniforme

- Para cualquier evento A en un Espacio Muestral Simple Ω, su probabilidad está dada por:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

esto es,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\#\ \text{de resultados en } A}{\#\ \text{de resultados en } \Omega}$$

Probabilidades en un EMS

Ejemplo

- Lanzar un par de dados, los 36 posibles resultados:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \dots & (6,6) \end{matrix}$$

- Cada uno de ellos, con una probabilidad de $1/36$.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea igual a 8?

Sum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prob	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ejercicio

- Los discos de plástico de policarbonato de un proveedor se analizan para resistencia a ralladuras y golpes. Los resultados de 100 discos se resumen como sigue:

		Resistencia a los golpes	
		alto	bajo
Resistencia	alto	70	16
al rayado	bajo	9	5

- Si un disco se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su resistencia al rayado es alta y su resistencia a los golpes es alta?, ¿cuál es la probabilidad de que su resistencia al rayado es superior o su resistencia a los golpes es alta?
- Considere el caso de que un disco tiene alta resistencia al rayado y el caso de que un disco tiene alta resistencia a los golpes. ¿Son estos dos eventos mutuamente excluyentes?

Técnicas de Conteo

- Dada la Ley de Probabilidad Discreta Uniforme el calculo de probabilidades se reduce a un conteo de resultados.
- En ocasiones el proceso de conteo no es tan simple como el ejemplo anterior.
- Si se trata de contar, podemos utilizar las **técnicas de conteo**:
  - Regla de la Multiplicación.
  - Permutaciones.
  - Combinaciones.
  - Regla de la Adición.

Regla de la Multiplicación

Definición

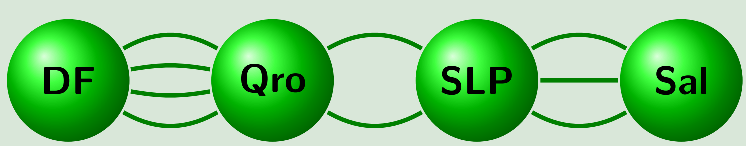
- Considere un experimento que toma lugar en varias etapas.
- El número de resultados n_i para cada una de las r etapas, es independiente de los resultados de la etapa previa.
- El número de resultados n_i podrían ser diferentes para cada etapa.
- El número total de formas en que todo el experimento puede llevarse a cabo, esta dado por:

$$n = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$$

Regla de la Multiplicación

Ejemplo

- Hay cuatro formas de ir del Distrito Federal a la ciudad de Querétaro,
- dos formas de ir de Querétaro a San Luis Potosí y
- tres formas diferentes de ir de San Luis Potosí a Saltillo.
- ¿De cuantas formas diferentes puedes ir del DF a Saltillo?



$$4 \times 2 \times 3 = 24$$

Ejercicio

- Cierto tipo de automóvil se encuentra disponible en tres colores: rojo, azul o verde, y puede tener un motor grande o pequeño.
- ¿De cuántas maneras puede un comprador elegir un automóvil?

Ejercicio

- Cuando se hace un pedido de cierto tipo de computadora, hay tres elecciones de disco duro, cuatro de la cantidad de memoria, dos de la tarjeta de video y tres de monitor.
- ¿En cuántas maneras se puede solicitar una computadora?

Permutaciones

Definición

- Un arreglo de n elementos en un *orden definido* es una **permutación** de los n elementos.

Ejemplo

- ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden formar con los números 1, 2 y 3?
- $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ arreglos diferentes
- $123, 132, 213, 231, 312, 321$

Permutaciones Permitiendo Repetición

Definición

- El número de arreglos con r elementos tomados de n elementos, cada uno usado al menos una vez. Esto es, los arreglos en los cuales se permite la repetición de alguno de los n elementos.
- Esta dado por

$$n^r$$

Ejemplo

- Número de arreglos (permutaciones) que se pueden lograr con los resultados de 4 lanzamientos de un dado:
- $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1269$

Permutaciones SIN Permitir Repetición

Defınción

- El número de arreglos con r elementos tomados de n elementos cada uno usado a lo más una sola vez, es llamado: número de permutaciones de n elementos tomando r elementos a la vez.

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Note que cuando $r = n$, es decir se permutan todos los elementos disponibles, entonces el denominador resulta $0! = 1$ por lo tanto

$$P_{n,n} = n!$$

Permutaciones SIN Permitir Repetición

Ejemplo

- De once estudiantes, se seleccionarán cuatro en forma aleatoria para que desarrollen y expongan cuatro diferentes temas. ¿De cuántas formas se podrían repartir los temas?
- $n = 11$ estudiantes disponibles,
- $r = 4$ estudiantes para cada uno de los temas
- $$P_{11,4} = \frac{11!}{(11-4)!} = 7920$$

Permutaciones

Ejemplo

- ¿Cuántas placas de automóvil de seis dígitos se pueden hacer con los números $0, 1, 2, \ldots, 9$ y ...

a) sin permitir repeticiones?

$$P_{10,6} = 10!/4! = 151\,200$$

b) permitiendo repeticiones?

$$10^6 = 1\,000\,000$$

c) que contengan repeticiones?

$$1\,000\,000 - 151\,200 = 848\,800$$

Permutaciones

Ejercicio

- Un comité de ocho personas debe elegir un presidente, un vicepresidente y un secretario.
- ¿De cuántas maneras se puede hacer esta selección?

Ejercicio

- Considere las placas de auto en el Distrito Federal
- ¿Cuántas placas de auto diferentes se podrían hacer?
- ¿Cuántas de esas tienen al menos un número o letra repetida?

Combinaciones

Definición

- El número de combinaciones de n elementos tomando r a la vez, se refiere al número de subconjuntos de r elementos escogidos a partir de un conjunto de n elementos.
- Esto es, el número de formas de seleccionar a r elementos de n disponibles, sin importar su orden.

Ejemplo

- ¿Cuántos subconjuntos que contengan dos elementos se pueden formar a partir de: $\{1, 2, 3\}$?
- Tres subconjunto o combinaciones: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

Combinaciones

Notación

- El número de combinaciones de n elementos tomando r a la vez se puede denotar como $C_{n,r}$ o también a través del factor binomial

$$\binom{n}{r}$$

Cálculo

- La fórmula explícita que nos proporciona el valor de $C_{n,r}$ es:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

Combinaciones

Ejercicio

- Diez ingenieros han solicitado un puesto administrativo en una gran empresa.
- Se seleccionarán a cuatro de ellos como finalistas para el puesto.
- ¿De cuántas maneras se puede hacer esta selección?

Ejercicio

- Existen 7 focos verdes y 5 color ámbar.
- Encuentre el número de posibles arreglos para colocarlos en fila.

Combinaciones

Propiedades

- $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$
- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$
- $$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Combinaciones y Probabilidad

Ejercicio

- Una caja con 24 latas contiene una que está contaminada.
- Se va a seleccionar al azar una muestra de tres latas para someterlas a una prueba.
- ¿Cuántas combinaciones (muestras) diferentes de 3 latas se pueden seleccionar?
- ¿Cuántas muestras contendrán la lata contaminada?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione la lata contaminada para la prueba?

Combinatorias Multinomiales

Definición

- Si tenemos un conjunto n elementos diferentes y queremos formar k subcinjuntos con n_1 elementos, n_2 elementos, $\ldots$, n_k elementos.
- Donde $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.
- Entonces el número de maneras de dividir dicho grupo de n está dado por:

$$C^{n}_{n_1 n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Combinatorias Multinomiales

Ejemplo

- Una compañía ha contratado a 15 nuevos empleados y debe asignar seis al turno matutino, cinco al vespertino y cuatro al nocturno.
- ¿De cuántas maneras se puede hacer la asignación?
- $$C^{15}_{6,5,4} = \frac{15!}{6! \times 5! \times 4!} = 630630$$

Regla de la Adición

- Si para desempeñar una tarea se usará uno de varios métodos.
- Por ejemplo podemos utilizar el método A en n_A formas o utilizar el método B en n_B formas.
- Entonces, se tiene que el número total de formas para desempeñar la tarea esta dado por $n_A + n_B$.
- Esta regla se utiliza si algún evento sucede cuando por ejemplo ocurre"al menos" o "a lo más" algo.
- Esto es, el evento esta formado por la unión de otros eventos mutuamente excluyentes cuyas cardinalidades se pueden calcular.

Ejercicio

- Un inspector de calidad hace un muestreo a un lote que consiste en 12 componentes, de los cuales 4 son defectuosos.
- El inspector toma una muestra de 3 componentes.
- Y rechaza el lote si encuentra al menos dos componentes defectuosos.
- ¿Cuál es la probabilidad de que rechace el lote?

Agenda

Probabilidad Condicional

- Si en el experimento de lanzar un dado tenemos:

$$A = \{1, 3, 5\}; \qquad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Entonces:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}; \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{5}{6}$$

- Suponga que sabemos que el evento B ocurrió. Entonces la probabilidad de A "dado que ocurrió" B es:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{2}{5} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

- Esto es, que ahora la probabilidad de A depende de la información que tenemos.

Probabilidad Condicional

Definición

- Si $\mathrm{P}(B) > 0$, entonces la *probabilidad condicional de A dado B* es igual a:
$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

- ¿Qué pasa con $\mathrm{P}(A|B)$ si los dos eventos son mutuamente excluyentes?
- ¿Qué pasa con $\mathrm{P}(A|B)$ si $\mathrm{P}(B) = 0$?

Probabilidad Condicional

Ejercicio

Un troquel de extrusión se utiliza para producir varillas de aluminio. Existen ciertas especificaciones para la longitud y diámetro de las varillas. Para cada una de éstas, la longitud puede ser demasiado corta, demasiado larga o estar bien y el diámetro se puede clasificar en muy delgado, muy grueso o estar bien. En una población de mil varillas, el número de ellas en cada clase es:

	Diámetro		
Longitud	Muy delgado	Está bien	Muy grueso
Muy corta	10	3	5
Está bien	38	900	4
Muy larga	2	25	13

- Calcule la probabilidad condicional P(diámetro está bien | longitud demasiado larga).
- ¿Ésta es la misma que la probabilidad incondicional P(diámetro está bien)?

Probabilidad Condicional

Ejercicio

- En un proceso que fabrica latas de aluminio, la probabilidad de que una lata tenga alguna fisura en su costado es de 0.02, la de que otra la tenga en la tapa es de 0.03 y de que una más presente una fisura en el costado y en la tapa es de 0.01.
- ¿cuál es la probabilidad de que una lata tenga una fisura en la tapa, dado que tiene una fisura en el costado?
- ¿cuál es la probabilidad de que una lata tenga una fisura en el costado, dado que tiene una fisura en la tapa?

Principio de la Multiplicación de Probabilidades

- Algunas veces se conoce $P(A|B)$ y se desea encontrar $P(A \cap B)$
- A partir de la fórmula de la probabilidad condicional, podemos derivar las fórmulas para la intersección de los eventos, a través del producto de dos probabilidades.

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(A|B)$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A)$$

Principio de la Multiplicación de Probabilidades

Ejemplo

- En un caja hay doce electrodos de los cales cuatro son defectuosos. Seleccione dos electrodos sin reemplazo.
- ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?
- A : Primer electrodo defectuoso.
- B : Segundo electrodo defectuoso.
- $(A \cap B)$: Ambos electrodos defectuosos.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A) \\ &= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Partición del Espacio Muestral

Definición

- Los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio muestral Ω si y solo si:

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes.
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
3. $\mathrm{P}(A_i) > 0$ para toda i.

- De esta manera cuando un experimento probabilístico se efectúa, solo un A_i ocurre.

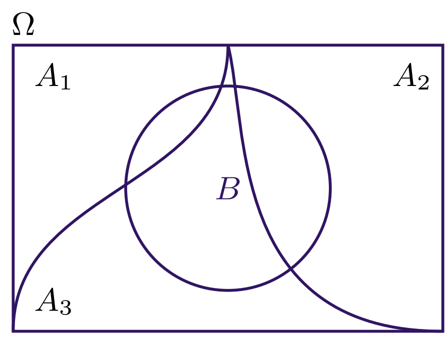
Ejemplo

- Un evento A y su complemento $\overline{A}$ forman una partición.

Teorema de Probabilidad Total

- Si hacemos una partición del espacio muestral Ω y B un evento arbitrario:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$



Ejercicio

- Clientes que compran cierta marca de automóvil pueden pedir un motor en cualquiera de tres tamaños.
- De todos los automóviles vendidos, 45% tiene el motor más pequeño, 35% tamaño mediano y 20% más grande.
- Los automóviles en una prueba de emisiones dentro de los dos años de su compra fallan 10% con el motor más pequeño, mientras que 12% de los de tamaño mediano y 15% de los de motor más grande.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil elegido aleatoriamente pueda fallar en una prueba de emisiones dentro de los dos primeros años?

Teorema de Bayes

- Ya conocemos las probabilidades a priori $\mathrm{P}(A_i)$ y las condicionales $\mathrm{P}(B|A_i)$; ahora deseamos conocer la $\mathrm{P}(A_i|B)$.
- Usando el *teorema de probabilidad total* y la definición de la *probabilidad condicional* obtenemos el *Teorema de Bayes*.

Definición

- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición de Ω y B es un evento cualquiera, entonces:

$$\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}$$

Teorema de Bayes

Ejemplo

- De un grupo de 40 ductos metálicos, 12 presentan fracturas internas.
- Suponga que la sistema para detectar fracturas no es perfecto, detectando fracturas en solo el 90% de los casos en que estas se presentan.
- Además, existe un 40% de probabilidad de sistema de una falsa alarma.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una tubería que se le haya detectado fracturas en realidad las tenga?

Teorema de Bayes

Ejemplo (Solución)

- F : "El ducto presenta fracturas"
- D : "Fracturas son detectadas"
- La partición de Ω es $\{F, \overline{F}\}$
- $\mathrm{P}(F) = 0.3; \qquad \mathrm{P}(D|F) = 0.9; \qquad \mathrm{P}(D|\overline{F}) = 0.4$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(F|D) &= \frac{\mathrm{P}(D|F)\mathrm{P}(F)}{\mathrm{P}(D|F)\mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(D|\overline{F})\mathrm{P}(\overline{F})} \\ &= \frac{(0.9)(0.3)}{(0.9)(0.3) + (0.4)(0.7)} \\ &= \frac{0.27}{0.55} \approx 0.5 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Ejercicio

- Con referencia al problema de tamaños de motores de la sección anterior.
- Si se elige aleatoriamente un registro de una prueba de emisiones con falla.
- ¿Cuál es la probabilidad de que éste sea un automóvil con un motor pequeño?

Teorema de Bayes

Ejercicio

- Una distribuidora obtiene la mitad de sus productos de la Fábrica 1, la otra mitad es obtenida de las Fábricas 2 y 3 en la misma proporción.
- Los porcentajes de productos defectuosos son 4%, 5% y 6% respectivamente para las Fábricas 1, 2 y 3.
- Un artículo de la distribuidora resulta ser defectuoso.
- Encuentre la probabilidad de este venga de la Fábrica 1.

Independencia

- Algunas veces el conocimiento de que un evento ha ocurrido no cambia la probabilidad de que ocurra otro.

Definición

- Los eventos A y B son *independientes* si y solo si

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$$

- Los eventos $A_1, \ldots, A_n$ son independientes si y solo si

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$$

Independencia

- Dos eventos A y B son independientes si la probabilidad de cada uno es la misma si ocurren o no los demás eventos.
- Si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$,entonces $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)$ y $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)$
- Si $\mathrm{P}(A) = 0$ entonces A es independiente de cualquier otro evento.
- Si A y B son independientes, entonces A y $\bar{B}$ son independientes.
- Si $\mathrm{P}(A) > 0$ y $\mathrm{P}(B) > 0$, entonces A y B no pueden ser **independientes** y **mutuamente excluyentes** al mismo tiempo

Aplicación al análisis de confiabilidad

Ejemplo

- Un sistema contiene dos componentes, A y B, conectados en serie, el sistema funcionará sólo si ambos componentes funcionan.
- La probabilidad de que A funcione está dada por $P(A) = 0.98$ y la probabilidad de que B funcione está dada por $P(B) = 0.95$.
- Suponga que A y B funcionan de manera independiente.
- Determine la probabilidad de que el sistema funciona.

Aplicación al análisis de confiabilidad

Ejemplo

- Un sistema contiene dos componentes, C y D, conectados en paralelo.
- El sistema funcionará si al menos uno, C o D funcionan.
- La probabilidad de que C funcione es 0.9 y la de que D lo haga es 0.85.
- Suponga que C y D funcionan de manera independiente.
- Determine la probabilidad de que el sistema funcione.

Ejercicio

Un sistema de aspersión automático especial tiene dos tipos diferentes de dispositivos de activación para cada regadera. Un tipo tiene una confiabilidad de 0.9; es decir, la probabilidad de que se active cuando debe la regadera es 0.9. El otro tipo, que opera independientemente del primer tipo, tiene una confiabilidad de 0.8. Si se dispara cualquier dispositivo, la regadera se activará. Suponga que empieza un fuego cerca de una regadera.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la regadera se active?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la regadera no se active?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ambos dispositivos de activación trabajen adecuadamente?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sólo el dispositivo con 0.9 de confiabilidad trabaje adecuadamente?

Agenda

5 Variables Aleatorias Discretas
- Introducción
- Distribuciones Discretas

Variables Aleatorias

Definición

Una *variable aleatoria* es una función del espacio muestral a la línea de los reales.

$$X : \mathbf{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$$

Ejemplo

Al lanzar dos monedas, $\Omega = \{ss, sa, as, aa\}$. Suponga que X es una variable aleatoria que corresponde al número de águilas.

$$X(ss) = 0, \quad X(sa) = X(as) = 1, \quad X(aa) = 2$$

$$\mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Variables Aleatorias - Notación

- Usualmente se usan letras mayúsculas tales como X, Y, Z, U, V, representan *variables aleatorias*.
- Letras minúsculas tales como x, y, z, u, v, w, representan "*valores particulares*" de las variables aleatorias.
- Así que podemos hablar de

$$\mathrm{P}(X = x)$$

o

$$\mathrm{P}(X \leq x)$$

Variables Aleatorias Discretas

Definición

Si el número de los posibles valores de una Variable Aleatoria X es finito ó contablemente infinito, entonces X es una *variable aleatoria discreta*.

Ejemplos

- Lanzar tres moneda, obtener el número posible de águilas. Se trata de una variable **discreta**.
- Seleccionar en forma aleatoria un punto en $[0, 1]$. Se trata de una variable **no discreta**.

Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo

- Sea X la suma de los resultados al lanzar dos dados. Entonces tenemos que $X([6,5]) = 11$. Además:

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} 1/36 & \text{si } x = 2 \\ 2/36 & \text{si } x = 3 \\ \vdots & \\ 6/36 & \text{si } x = 7 \\ \vdots & \\ 2/36 & \text{si } x = 11 \\ 1/36 & \text{si } x = 12 \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

Función de Masa de Probabilidad

Definición

Si X es una variable aleatoria discreta, entonces la **Función de Masa Probabilidad** se define para cada posible x como:

$$f(x) = \mathrm{P}(X = x)$$

Definición

El conjunto de todas las parejas $[x, f(x)]$ es la **Distribución de Probabilidad**. Note que:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \sum_x f(x) = 1$$

Función de Masa de Probabilidad

Ejemplo

- Sea X la suma de los resultados al lanzar dos dados.

$$f(x) = \begin{cases} 1/36 & \text{si } x = 2 \\ 2/36 & \text{si } x = 3 \\ \vdots & \\ 6/36 & \text{si } x = 7 \\ \vdots & \\ 2/36 & \text{si } x = 11 \\ 1/36 & \text{si } x = 12 \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

Ejercicio

Ejercicio

- El número de fallas en un alambre de cobre de 1 pulg de longitud, fabricado en proceso específico, varía de alambre en alambre.
- En conjunto, 48% de los alambres producidos no tiene falla, 39% presenta una, 12% fue detectado con dos y 1% tiene tres.
- Sea X el número de fallas en una pieza de alambre seleccionada aleatoriamente.
- Describa y grafique la función de masa de probabilidad

Función de Distribución Acumulada (fda)

Definición

- Si X es una variable aleatoria discreta, y función de probabilidad $f(x)$ entonces la *fda* de X es definida para toda x como

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x),$$

entonces:

$$F(x) = \sum_i f(x_i), \quad \forall\, x_i \leq x$$

Función de Distribución Acumulada (fda)

Ejemplo

- Dado un experimento aleatorio: Lanzar dos monedas.
- Sea X el número de soles.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Valor Esperado

Definición

- El *valor esperado* ó la *media* ó el *valor promedio* de una variable aleatoria discreta X es :

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \sum_x x f(x)$$

- La media ó valor esperado nos da una indicación de la tendencia central de una variable aleatoria.

Ejercicio

- Determine la media de la variable aleatoria X que representa el número de fallas en una pieza de alambre elegida aleatoriamente.

Varianza

Defición

- La varianza de la variable aleatoria discreta X es el segundo momento central.

$$\mathsf{V}(X) = \sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 f(x)$$

$$= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$$

- La varianza es un parámetro que describe la disperción de la VA.
- Notación: $\sigma^2 = \sigma_X^2 = \mathsf{V}(X) = \mathsf{V}(X)$

Varianza

Ejercicio

- Determine la varianza de la variable aleatoria X que representa el número de fallas en una pieza de alambre elegida aleatoriamente.

Ejercicio

- Sea la VAD X el no. de partes defectuosas al sacar una muestra de tres de una línea de producción, con la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0.51 & \text{para } x = 0 \\ 0.38 & \text{para } x = 1 \\ 0.10 & \text{para } x = 2 \\ 0.01 & \text{para } x = 3 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

- Determine, $\mathrm{P}(X < 2)$, $\mathrm{P}(X \geq 1)$, $\mathrm{E}[X]$ y $\mathrm{V}[X]$.

Distribución Uniforme

Definición

- Sea X una VAD finita, la cual posee n valóres específicos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada valor con una probabilidad de $1/n$. Esto es, que su función de probabilidad esta definida por:

$$f(x) = \frac{1}{n}, \qquad x = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- La media y la varianza de la distribución uniforme discreta:

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{E}[X])^2$$

Proceso de Bernoulli

- En muchas ocasiones, un experimento aleatorio se desarrolla al repetir n veces un ensayo.
- Dicho ensayo tiene dos resultados que se pueden calificar ya sea como un “exito” o como un “fracaso”.
- Ya que las repeticiones son independientes una de la otra, las probabilidades de éxito (p) o fracaso ($q = 1 - p$) se mantienen constantes.
- A todo el experimento antes descrito se le denomina **“Proceso de Bernoulli”** y a cada repetición se le llama **“Ensayo de Bernoulli”**, notación: Bern(p).

Distribución Binomial

- Si X denota el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli con $\mathrm{P}(\text{éxito}) = p$, entonces X es una **Variable Aleatoria de Binomial**, $X \sim \text{Bin}(n, p)$.
- La distribución de esta variable aleatoria discreta es una **Distribución Binomial** con parámetros n y p.
- En esta distribución, la $\mathrm{P}(X = x)$ se denotará como $\mathrm{b}(x; n, p)$.

$$\mathrm{b}(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- La media y la varianza de la distribución binomial:

$$\mathrm{E}[X] = np, \qquad \mathrm{V}(X) = npq$$

Distribución Geométrica

- Suponga que consideramos secuencia infinita de ensayos de Bernoulli $\text{Bern}(p)$.
- Sea la variable aleatoria X el número de ensayos hasta que el primer éxito es obtenido.
- Entonces, X es una **Variable Aleatoria Geométrica**, $X \sim \text{Geom}(p)$.
- Cuando $X = x$ corresponde a $x - 1$ fracasos y un éxito. La distribución de probabilidad de X es una **Distribución Geométrica**:

$$\mathrm{g}(x; p) = pq^{x-1}, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

- La media y la varianza de la distribución geométrica:

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribución Binomial Negativa

- Suponga que consideramos secuencia infinita de ensayos de Bernoulli Bern(p).
- Sea la variable aleatoria X el número de ensayos hasta obtener el $k-\text{ésimo}$ éxito.
- Entonces, X es una **Variable Aleatoria Binomial Negativa**, $X \sim \text{NegBin}(k,p)$.
- La distribución de probabilidad de X es una **Distribución Binomial Negativa**:

$$\mathsf{b}^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \qquad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

- La media y la varianza de la distribución binomial negativa:

$$\mathrm{E}[X] = \frac{k}{p}, \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

Variable Aleatoria Hipergeométrica

- La **variable aleatoria hipergeométrica** X representa el número de éxitos de una muestra aleatoria de tamaño n que se selecciona de N artículos, de los que k se denominan "éxitos" y $N-k$ "fracasos".

$$\mathsf{h}(x;N,n,k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- La media y la varianza de la distribución hipergeométrica:

$$\mathrm{E}[X] = \frac{nk}{N}, \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

Proceso Poisson

- Sea $N(t)$ un proceso de conteo. Esto es, $N(t)$ es el número de ocurrencias (o arribos, o eventos) de algún proceso sobre el intervalo continuo $[0, t]$.
- Sea $\lambda > o$ el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo o longitud o volumen, etc.
- El número de resultados en dos intervalos mutuamente excluyentes, son independientes. Por lo que el proceso Poisson no tiene memoria.
- Los resultados ocurren uno a la vez y a un ritmo de $\lambda/unidad\ de\ tiempo$ y este no cambia con el tiempo.
- La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy pequeño es proporcional a la longitud del intervalo y no depende de el número de resultados que suceden fuera de este.

Distribución Poisson

- Sea X el número de resultados en un proceso **Poisson(λ)** en una unidad del intervalo de tiempo.
- Entonces X tiene una **Distribución de Poisson** con parámetro λ.
- Notación: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

$$\mathsf{p}(x; \lambda) = \frac{\mathsf{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0$$

- La media y la varianza de la distribución Poisson.

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{V}(X) = \lambda$$

- El valor de λ puede ser cambiado simplemente al cambiar las unidades de tiempo.

Agenda

6 Variables Aleatorias Continuas
- Introducción
- Distribuciones Continuas

Variable Aleatoria Continua

- Si por ejemplo; un experimento consiste en seleccionar en forma aleatoria un número entre 0 y 1.
- Existen un número **infinito** de posibles resultados con la **misma probabilidad**.
- Por lo cual:

$$\mathrm{P}(cada\ punto) = \mathrm{P}(X = x) = 0$$

Definición

- Entonces, una **Variable Aleatoria Continua** es aquella con una cantidad **infinita** e **incontable** de posibles valores y con una probabilidad de **cero** para cada valor particular.

Función de Densidad de Probabilidad

- Sea X una variable aleatoria continua, entonces $f(x)$ es una legítima función de densidad de probabilidad (fdp) si:

1. El área bajo $f(x)$ es igual a 1

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

2. Nunca es negativa: $f(x) \geq 0, \qquad \forall\, x$
3. La probabilidad de que X tome un valor dentro del intervalo (x_1, x_2), es igual a el área bajo $f(x)$ en dicho intervalo.

$$\mathrm{P}(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Función de Distribución Acumulada

- La función de distribución acumulada (fda), está definida por

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$$

- En el caso de una variable aleatoria **continua** esto implica

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- **Teorema:** Si X es una V.A. Continua:

$$f(x) = F'(x) \qquad o \qquad F(x) = \int f(x)dx$$

Ejemplo

- Sea X una variable aleatoria continua con fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- Calcular la función de distribución acumulada.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{3x^2}{8}\,dx = \frac{x^3}{8}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ x^3/8 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Valor Esperado

- La media o valor esperado de una V.A.C. X, esta dado por

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

- El valor esperado de una función de X, por ejemplo $g(X)$, esta dado por

$$\mu = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$$

Ejemplo

- Sea X una variable aleatoria continua con fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- Calcular el valor esperado de X:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx \\ &= \int_0^2 \frac{3x^3}{8}\, dx \\ &= \left.\frac{3x^4}{32}\right|_0^2 = 1.5 \end{aligned}$$

Varianza

Definición

La varianza para una Variable Aleatoria Continua X está dada por

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2$$

Defínción

La Desviación Estándar está dada por: $\sigma = +\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

Ejemplo

En el ejemplo anterior la varianza está dada

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 = 2.4 - (1.5)^2 = 0.15$$

Distribución Uniforme Continuo

- Si X es igualmente probable en cualquier parte dentro del intervalo (a, b).
- Entonces X tiene una **distribución uniforme** en (a, b).
- Es decir $X \sim \mathsf{U}(a, b)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Distribución Triangular

- Este es muy bueno cuando se quiere modelar variables aleatorias a partir de una cantidad limitada de datos (mínimo, moda, máximo). Si se aplica a una VAC, $X \sim \mathsf{Tri}(a, b, c)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x < b \\ \dfrac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b \leq x \leq c \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b+c}{3} \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$$

Distribución Exponencial

- Considere un Proceso Poisson.
- Esta distribución puede modelar el tiempo que transcurre antes de que ocurra un evento.
- Tiempos de espera, tiempo de vida de un componente, longitud entre defectos, etc.
- Así, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, es decir, que X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[X] = 1/\lambda, \qquad \mathrm{V}(X) = 1/\lambda^2,$$

Distribución Normal

- Es quizá, la más importante función de densidad en probabilidad y estadística. Sea $X \sim \text{Nor}(\mu, \sigma^2)$, es decir, X tiene una distribución normal con parámetros μ (media) y σ^2 (varianza), así como una fdp:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- Esta distribución describe en forma aproximada muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación; como lo son, mediciones y errores.

Distribución Normal Estándar

- La distribución Nor$(0,1)$ es llamada **distribución normal estándar**.
- La variable normal estándar Nor$(0,1)$ es frecuentemente denotada por la letra Z.
- Lo bueno de esta distribución normal estándar, es el hecho de que hay tablas disponibles para su función de distribución acumulada.
- Es posible estandarizar cualquier variable aleatoria normal X en una normal estándar al aplicar la transformación:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Distribución Normal Estándar

- La función de distribución acumulada de Nor$(0,1)$ es $\Phi(z)$
- Por ello:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z \leq a) &= \Phi(a) \\
\mathrm{P}(Z \geq b) &= 1 - \Phi(b) \\
\mathrm{P}(a \leq Z \leq b) &= \Phi(b) - \Phi(a) \\
\Phi(0) &= 1/2 \\
\Phi(-b) = \mathrm{P}(z \leq -b) &= \mathrm{P}(z \geq b) = 1 - \Phi(b) \\
\mathrm{P}(-b \leq Z \leq b) &= 2\Phi(b) - 1
\end{aligned}$$