Concepto y significado de la Investigación de Operaciones.

La Investigación de Operaciones es la aplicación del método científico por un grupo interdisciplinario a fin de representar las complicadas relaciones funcionales como modelos matemáticos para suministrar una base cuantitativa para la toma de decisiones y descubrir nuevos problemas para su análisis cualitativo.

Significado:

a) Una organización se puede interpretar como un sistema el cual tiene componentes que interaccionan entre sí, algunas de estas interacciones son controlables y otras no.

b) Un sistema es una estructura en funcionamiento, dicho funcionamiento se lo proporciona la información, de esto podemos concluir que todo sistema es un sistema de información.

c) Algunos problemas que presentan algunas organizaciones no son fáciles de resolver y para su análisis y solución se requiere de grupos compuestos por diferentes especialistas, estos son los llamados grupos interdisciplinarios que requieren estar coordinados y tener buena comunicación entre sí.

d) La Investigación de Operaciones aplica el método científico a través de los modelos, estos modelos son matemáticos y toman la forma de ecuaciones que permiten calcular los valores exactos o aproximados de los componentes controlables del sistema.

Etapas para la construcción de un modelo.

a) Detallar todos los componentes que contribuirán a la efectividad del sistema.

b) Determinarse si deben usarse esos componentes.

c) Una vez que se han elegido los elementos importantes es conveniente combinarlos y dividirlos.

d) Cuando se ha terminado con cada elemento es necesario determinar si es fijo o es variable (controlable o no controlable).

e) Asignar un símbolo a cada elemento en donde por lo menos un símbolo represente la medida de eficacia o ineficiencia.

f) Las fórmulas resultantes son un modelo simbólico o matemático de los elementos de estudio.

Significado de la programación lineal.

Programación: Utiliza ciertas técnicas matemáticas para llegar a la mejor solución empleando los recursos limitados de la empresa.

Lineal: Se usa para describir una relación entre dos o más variables que son directamente proporcionales.
Por lo tanto programación lineal es: La técnica matemática para determinar la mejor asignación de los recursos limitados de la empresa.

Alcances y limitaciones de esta herramienta

Alcance: Puede utilizarse para resolver una clase general de problemas de asignación de recursos incluyendo mezclas de productos, combinación y programación.

Limitación: El uso práctico de la solución gráfica está limitado a problemas de dos variables.
La programación lineal es una de las herramientas más importantes empleadas en la Investigación de Operaciones, la programación lineal es una estructura matemática que implica consideraciones matemáticas específicas, es un modelo de aplicación general.

Conceptos de la programación lineal.

a) Función Objetivo: Función matemática que define la efectividad del modelo como función de las variables de decisión.

b) Costos: Sistema para determinar las recorridas factibles de flujo de efectivo durante un proyecto.

c) Actividad: Trabajo que debe realizarse como parte de un proyecto simbolizado mediante un área o rama de la red PERT.

d) Alternativa: Cuando la función objetivo es paralela a una restricción de enlace, es decir, no satisface el sentido de la igualdad a través de la solución óptima, la función objetivo tomará el mismo valor óptimo en más de un punto de solución.

e) Restricciones: Son las limitaciones físicas que ocurren en el problema, por lo general se expresan como funciones matemáticas.

f) Linealidad: Tanto la función objetivo como las restricciones deben ser funciones lineales de Xj. Esto implica que no se permiten en el problema productos cruzados, potencias de Xj u otras funciones no lineales. También implica que la utilización del recurso es proporcional y aditiva.

g) Variable Real: (Variable Básica) Las variables que se hacen igual a cero se llaman variables no básicas y las restantes se conocen como variables básicas.

h) Variable de holgura: (o de excedente) Variables que se suman (o se restan) a las desigualdades para convertirlas en igualdades. La holgura representa una cantidad no utilizada o la diferencia entre lo que es usado y el límite de lo que puede usarse.

i) Variable artificial: Variable ficticia que se suma a los problemas que tienen variable de excedente para facilitar la identificación de una solución inicial.

j) Costo de oportunidad: En un problema de transporte, diferencia entre la celda que arroja mayores utilidades en un renglón y la utilidad de otra celda en ese mismo renglón.

k) Precio sombra: Valor de una unidad adicional de un recurso, se encuentra en el renglón Zj bajo la variable de holgura correspondiente al recurso.

l) Programa factible: (Solución factible). Es una solución para la cual todas las restricciones son satisfechas.

m) Programa óptimo: (Solución óptima). Es una solución factible que brinda el valor más favorable para la función objetivo.

n) Variable entrante: Es una variable no básica actual que entrará en le conjunto de variables básicas en la siguiente interacción.

o) Variable saliente: Es una variable básica actual que saldrá de la solución básica en la interacción siguiente.

p) *Minimizar:* Reducir costos cuya función objetivo tiene la forma :

Min Z= Ax1 + Bx2 + ... + Mxn

q) *Maximizar:* Aprovechar al máximo un recurso.

ÁREAS DE PROBLEMAS DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

El área de problemas de la I. O. tiene por objeto ilustrar a la administración sobre los posibles peligros que pueden impedir la terminación eficaz de un proyecto de I.O.

Si se hace que la administración se dé cuenta de las áreas potenciales de problemas, y que reconozca los problemas a medida Que ocurren, las correcciones podrán hacerse en el acto y no en alguna fecha posterior cuando todo el proyecto de I.O ha fracasado o no tiene compostura posible.

COMPUTADORAS MAL APROVECHADAS

Algunos proyectos de I.O han fracasado debido al mal uso de la alta velocidad y fuerza bruta de las computadoras en vez de un sólido análisis. El tiempo de la computadora se emplea en muchas corridas en problemas sin importancia, lo que ocasiona costos excesivos de computadora en un proyecto. En, vez de usar un enfoque planeado en el que la computadora forme parte integrante con la selección de la solución óptima.

DEMASIADA INSISTENCIA EN LA TÉCNICA

Un examen de las numerosas técnicas y del tiempo disponible de las computadoras, puede constituir por si mismo un problema. El grupo de I.O podría encauzar todos sus esfuerzos hacia la mecánica de la técnica y a la forma en que debe programarse en -vez de dirigirlos al producto final, que consiste en resolver un problema específico. Como resultado de todo esto los I.O se han ocupado de problemas insignificantes tan solo porque hay una técnica conocida y una computadora disponible. Otros -mas se han ocupado de la elegancia de un método que puede llevar a una solución complicada y correcta, que puede ser demasiado compleja o demasiado tardía para que --sea útil. Este método produce también la sobre optimización, o sea trata de lograr -los últimos puntos de una mejoría mediante un análisis detallado y costoso. Muchas veces un modelo mucho menos complicado dará por resultado el logro de la parte principal de la ganancia a un costo mucho menor, con muchas mayores probabilidades de -éxito. Como puede verse, con mucha frecuencia las técnicas dominan al problema, Sin embargo, son fundamentales e indispensables para el constante progreso de la I.O

ORGANIZACIÓN PARA LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

La iniciación de las actividades de I.O en una empresa puede lograrse I.O cuatro un dos: mediante el adiestramiento interno del personal de la organización, contratando expertos o especialistas, contratando un grupo externo de consulta y empleando -una combinación de personal de la compañía y de consultores externos.

ÁREAS DE ÉXITO DE LA I.O

Las listas de las áreas funcionales de una empresa que se dan a continuación son una muestra de los muchos problemas que la I.O ha explorado y resuelto con éxito.

COMPRAS Y OBTENCIÓN DE MATERIALES

Cuando se compran materias primas, la I.O se ha usado para fijar reglas cuando los precios son estables o muy irregulares. Un enfoque correcto de compras debe -tener en cuenta la cantidad que hay que comprar. Otras importantes consideraciones de compra para un modelo de I.O. son las siguientes: mantenimiento de los -costos de inventario, costos de compra., caducidad del artículo, costos de transportación, almacenamiento disponible, localización de suministros y capacidad de substitución de otra materia prima. La I.O ha emprendido muchos estudios que -han tratado de determinar si es más conveniente comprar piezas ensambladas o manufacturarlas. Los factores que hay que considerar son los siguientes: frecuencia con que se compra el artículo, precios de compra., costos fijos y variables de la manufactura, carga actual de la fábrica y plazo de entrega. Los estudios -de I.O. también se ocupan de la compra optima de activos fijos en términos de modelos de maquinas y de fabricantes específicos. Se han hecho estudios para determinar cuándo debe comprarse equipo nuevo o usado, o si el equipo debe alquilarse o comprarse.

MANUFACTURA

La I.O se ha usado para asignar órdenes de producción a las diversas fábricas -de la empresa basándose en los costos de producción y de transportación. En los estudios de I.O se han estabilizado la producción y el empleo mediante la consideración de los costos de contratación, y de adiestramiento, así como los despidos temporales y definitivos. La I.O se ha empleado en la selección de sitios y tamaño de fábricas, de las mezclas optimas de manufactura y del tipo y cantidad de equipo que debe instalarse. En muchos casos las políticas de operación de la manufactura pueden optimizarse mejor utilizando la I.O Los estudios han incluido la planeación y programación de la producción, cuando hay que tomar decisiones sobre mezclas de productos, secuencias, tiempo extra y turnos adicionales. También se han determinado los efectos de las políticas de mantenimiento sobre el buen funcionamiento de las instalaciones de manufactura, de la utilización de la mano de obra y se han -resuelto problemas de manejo y tráfico de materiales. Hasta cierto punto la I.O ha ayudado en la planeación y programación de las operaciones de trabajos de taller. Ha sido una gran ayuda para balancear los costos generales del tiempo de espera de los empleados contra el costo de los ayudantes en un problema de línea de espera en las casetas de herramientas y suministros.

MERCADOS Y DISTRIBUCIÓN FÍSICA

La I.O se está aplicando cada vez más a la distribución y venta de productos. Se ha empleado para determinar qué proporción del total del presupuesto de mercado debe emplearse en personal de ventas, publicidad. y promoción de ventas. La I.O ha ayudado al desarrollo e introducción de muchos productos nuevos, así como en la selección de productos, oportunidad de presentación de los nuevos, predicciones de la demanda y -pronósticos de las actividades competidoras de otras empresas.

Con respecto a la distribución física, se han desarrollado modelos de I.O para localizar y determinar el tamaño de las bodegas, centros de distribución y centros de -ventas. Se han tomado decisiones sobre la asignación de espacio interno para exhibición y sobre accesibilidad de las mercancías y sobre los centros de venta que son -propiedad de la empresa comparándolas con las concesiones *que podría ofrecer.*

FINANZAS Y CONTABILIDAD

Los estudios de I.O se han empleado para desarrollar procedimientos automáticos de_ contabilidad y de procesamiento de datos que disminuyan los costos de oficina y que permiten a la vez un buen control interno.

Los análisis de flujo de efectivo, requerimiento de capital a largo plazo, inversiones alternativas, fuentes de capital y políticas de dividendos son algunos de los --problemas financieros comunes que se han resuelto. La I.O. se ha aplicado al diseño de carteras (acciones y bonos) a fin de conservar su valor en condiciones cambiantes.

PERSONAL

La influencia de la automatización y la posibilidad de acelerarla para disminuir los costos de una empresa sin causar molestias a los empleados de las fábricas es un problema para estudio y solución con la I.O. Se examinan las causas de accidentes y los problemas de renovación de personal y de ausentismo para que la empresa pueda atenuarlos. Los métodos de I.O. se han utilizado para reclutamiento de personal, para clasificarlo eficazmente y para asignarlo a las tareas donde pueda ofrecer la mejor actuación.

INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

Se han resuelto los presupuestos de investigaciones y desarrollo y la asignación -apropiada para las investigaciones básicas. El monto de cada proyecto, el tamaño de las instalaciones de investigaciones y desarrollo y el personal relativo se han de--terminado mediante estudios previos de I.O.
La I.O. se ha empleado para determinar las zonas donde deben concentrarse las inves-tigaciones y el desarrollo basándose en los resultados reales o supuestos, para el -

desarrollo de pautas para la evaluación de diferentes diseños y para determinar la -expectativa de vida y la confiabilidad que se tenga en el producto.

PLANEACIÓN TOTAL

Se han emprendido muchos proyectos de planeación total: la redefinición de los objetivos de la empresa, una nueva estructura de organización, políticas optimas generales de la compañía, programas para el completo desarrollo de los recursos de la empresa. En muchos proyectos de investigaciones y desarrollo, construcción de una nueva fábrica y presentación de un nuevo producto, todo esto puede descomponerse en un gran número de actividades. Algunas tienen que esperar que otras se terminen antes -que puedan iniciarse, mientras que hay algunas que pueden llevarse a cabo simultáneamente. Cuando se ha definido lógicamente la secuencia de actividades, pueden determinarse las actividades criticas para poner al descubierto cuellos de botella futuros. Se han ideado métodos de planeación (PERT) para controlar y disminuir cuando es posible el tiempo y los costos relativos.

La aplicación en la industria de la investigación de operaciones, es muy importante debido a que utilizada de manera correcta permite coordinar elementos y actividades componentes, que ayudan a resolver problemas relacionados con la planeación, diseño, operación control y optimización de sistemas destinados a la producción de bienes y servicios.

Metodología científica
-Observación del sistema
-Identificar y formular el problema
-Establecer una serie de hipótesis
-Experimentar con los resultados
-Verificar los resultados

Algunas áreas de aplicación de la investigación de operaciones dentro de una empresa son:
-Mercadotecnia
-Producción
-Finanzas

En mercadotecnia, se utiliza la investigación de operaciones para determinar las características y el tamaño del mercado, por ejemplo:
-Participación de la empresa en el mercado
-Tendencia de precios
-Demanda de productos
-Planeación de publicidad y ventas

En producción se requiere principalmente estimar sobre:
-Las ventas de cada artículo
-Para planear la estructura de producción
-Niveles de inventario
-Requerimiento de materiales
-Tendencia de costo de materiales
-Requerimiento de mantenimiento

En el área de finanzas, algunas de las principales aplicaciones que se tienen son:

-Pronosticar los flujos de dinero de la empresa, las tasas de costo y préstamos.
-Para garantizar la liquidez y operación de la empresa.

El análisis de los datos se utiliza como facilidad de referencia de los problemas, una vez teniendo los datos generalmente se tabulan o se archivan, para posteriormente expresarlos en función de gráficas o ecuaciones.

Haciendo uso principalmente de técnicas estadísticas y matemáticas que incluyen regresión múltiple, muestreo, programación lineal.

Análisis de tipo matemático (programación lineal)
Entonces los datos básicos a considerar serían:

-La disponibilidad de los recursos
-Los costos o precios unitarios
-Los coeficientes tecnológicos
-El numero de actividades
-Número de restricciones

Análisis estadístico
La información que se capta puede tener características de tipo:

-Cuantitativo (aspectos numéricos de lo que se observa)
-Cualitativo (atributos o propiedades)

Pudiendo los datos ser discretos o continuos, así como también dividirse en poblaciones (totalidad de los elementos) y muéstrales (estudian solo una parte del conjunto o población).

FASES DE UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

a) Estudio de la organización
b) Interpretación de la organización como un sistema
c) Formulación de los problemas de la organización
d) Construcción del modelo
e) Derivación de soluciones del modelo
f) Prueba del modelo y sus soluciones
g) Diseño de controles asociados a las soluciones
h) Implantación de las soluciones al sistema

BENEFICIOS DE UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

a) Incrementa la posibilidad de tomar mejores decisiones.
b) Mejora la coordinación entre las múltiples componentes de la organización.
c) Mejora el control del sistema.
d) Logra un mejor sistema.

USO DE LA I.O. EN ACTIVIDADES ACTUALES

TÉCNICAS	No. PROYECTOS	FRECUENCIA DE USO (%)
Análisis estadístico *	63	29
Simulación	54	25
Programación lineal	41	19
Teoría de inventarios	13	6
PERT/CPM	13	6
Programación dinámica	9	4
Programación no lineal	7	4
Colas	2	1
Programación heurística	2	1
Otros	13	6

* Incluye teoría de probabilidad, análisis de regresión, suavisamiento exponencial, muestreo estadístico y pruebas de hipótesis.

LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL ESTÁN SUJETOS A CIERTAS RESTRICCIONES

Proporcionalidad. Dado que la función objetivo y restricciones son lineales, esto implica que la medida y efectividad de los recursos usados debe ser proporcional al nivel de cada actividad por separado.

Ejemplo: Dentro de la agricultura el empleo de una unidad de recurso para el programa, implicará el desarrollo de una actividad en la producción agrícola

Una Ha. de tierra $\longrightarrow$ **Cultivo**

Acumulación (Aditividad). Los cambios que se hagan en la aplicación de los recursos, de la misma manera se harán en las actividades a desarrollar de tal forma que los incrementos y decrementos realizados sean proporcionales.

Divisibilidad. No es entera, las actividades pueden realizarse en cualquier extensión positiva mientras se disponga de recursos existentes.

Una Ha de tierra fraccionada en partes para sembrar en cada una de ellas un cultivo diferente si eso es lo más conveniente.

Determinística. Existe un número finito de actividades disponibles, así como de la cantidad de recursos con que se cuenta.

Expresión matemática del Problema General de la Programación Lineal.

$$\boldsymbol{Max\ Zx = U_1X_1 + U_2X_2+U_3X_3+...........+U_nX_n}$$

Sujeta a las condiciones:

$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + A_{1n}X_n <= B_1$

$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + A_{2n}X_n <= B_2$

$A_{m1}X_1 + A_{m2}X2 + A_{m3}X_3 + A_{mn}X_n <= B_n$

con $X_1, X_2, X_3,......, X_n \geq 0$

donde Aj, Bj, Uj; son constantes.

MAX $Zx = Ux$

S.A:

$Ax \leq Bx$

$x \leq 0$

Problema 1

Una enlatadora de jugos puede fabricar tres líneas diferentes que son mango, guayaba y tamarindo; cada uno de estos tipos de envasado tienen que pasar por los procesos P_1, P_2, P_3 y P_4 cuya unidad de tiempo requerido en horas por cada proceso es como sigue:

	P1	***P2***	***P3***	***P4***
Mango	0.11	0.25	0.39	0.05
Guayaba	0.15	0.93	0.12	0.15
Tamarindo	0.17	0.17	0.12	0.25

La demanda anual de cada tipo de fruta envasada es de 150,000 unidades, no se tiene más de 8750 hrs anuales disponibles para cada proceso. El costo de producción unitario de cada tipo de envasado es el siguiente:

	Precio Unitario
Mango	4.25
Guayaba	3.80
Tamarindo	5.20

Se desea conocer cuántas unidades se deben producir de cada tipo de envasado con el objeto de que los costos sean mínimos.

X_i = Cantidad de unidades a producir de mango, guayaba, y tamarindo; siendo i = 1,2,3

$$Min\ Z = 4.25X1 + 3.80X2 + 5.20X3$$

S.A.:

Restricción de tiempo disponible

$0.11X_1 + 0.15X_2 + 0.17X_3 \leq 8750$

$0.25X_1 + 0.93X_2 + 0.17X_3 \leq 8750$

$0.39X_1 + 0.12X_2 + 0.12X_3 \leq 8750$

$0.05X_1 + 0.15X_2 + 0.25X_3 \leq 8750$

Restricción de volumen de la demanda.

$X_1 \geq 150,000$

$X_2 \geq 150,000$

$X_3 \geq 150,000$

Problema 2

Supóngase que Ferrocarriles Nacionales de México tiene la siguiente demanda mensual de locomotoras diesel para operar su sistema en todo el país:

Período	***Locomotoras***
1er. mes	750
2o. mes	800
3er.mes	780

La gerencia de los ferrocarriles puede satisfacer su demanda mediante la combinación de las siguientes políticas:

a) Uso de la existencia de locomotoras diesel que tiene en función para este mes.

b) Comprar locomotoras al extranjero que se entregan de inmediato.

c) Mandar reparar locomotoras a los talleres nacionales, el tiempo de reparación normal es de dos meses.

d) Mandar reparar locomotoras a los talleres nacionales con carácter de extra urgencia cuyo caso de reparación es de un mes.

La política b tiene un costo de $5,000,000 por locomotora, la c $50,000 por unidad y la d $250,000.

Se supone que cada mes el 5% de locomotoras tienen que mandarse a reparar y hay ½% de bajas, es decir, locomotoras tan viejas que ya no es posible reparar.

El presupuesto para los próximos tres meses es de $100,000,000 y se tiene al iniciar el 1er mes 650 locomotoras en operación, o en reparación normal y extra urgente, bajo esta situación ¿qué combinación de políticas debe seguir la Gerencia de Ferrocarriles Nacionales de México para satisfacer la demanda y minimizar costos?

$X_i \geq 0$ = Locomotoras diesel a comprar en el mes , siendo i = 1,,2,3

$Y_i \geq 0$ = Locomotoras a reparar en tiempo normal, i + 2, siendo i = 1,2,3

$Z_i \geq 0$ = Locomotora a reparar extraurgentes, i + 1, siendo i = 1,2,3

$$\textit{Min } Z = 5\,000{,}000 \sum_{i=1} X_i + 50{,}000 \sum_{i=1} Y_i + 250{,}000 \sum_{i=1} Z_i$$

Demanda satisfecha en el 1er. mes : $650 + X_j = 750$

Al fin del mes habrá: $X_1 + 650$, 5% pasará a reparación y ½ % se dará de baja.

El número de locomotoras a repararse es de:

$$Y_1 + Z_1 = 0.05\ (650 + X_1)$$

El número total en operación es de:

$650 + X_1 - 0.05\ (650 + X_1) - 0.005\ (650 + X_i) =$

$(650 + X_1)\ (1 - 0.005) = 0.945\ (650 + X1)$

La demanda del mes siguiente será:

existencias + compras + reparaciones extraurgentes.

$0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1 = 800$

Al fin de mes las unidades a reparar son:

$Y_2 + Z_2 = 0.05 \,\mathbf{[}\, 0.945 \,\mathbf{(}\, 650\ X1 \,\mathbf{)]} + X_2 + Z_1$

Total en operación al iniciar el 3er. Mes

$0.945[0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_2] + X_3 + Z_2 + Y_1 = 780$

Reparaciones del último mes:

$Y_3 + Z_3 = 0.05 \,\mathbf{\{}\, 0.945 \,\mathbf{[}\, 0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1 \,\mathbf{]} + X_3 + Z_2 + Y_1 \,\mathbf{\}}$

Presupuesto trimestral:

$5{,}000{,}000 \sum_{i=1} X_i + 50{,}000 \sum_{i=1} Y_i + 250{,}000 \sum_{i=1} Z_i \leq 100{,}000{,}000$

En resumen:

$\boldsymbol{Min\ Z = 5{,}000 \sum_{i=1} X_i + 50{,}000 \sum_{i=1} Y_i + 250{,}000 \sum_{i=1} Z_i}$

s. a :

$650 + X_1 = 750$

$0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1 = 800$

$0.945[0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1] + X_3 + Z_2 + Y_1 = 780$

$Y_1 + Z_1 = 0.05 (650 + X_1)$

$Y_2 + Z_2 = 0.05[0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1]$

$Y_3 + Z_3 = (0.05) \{ 0.945 [0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1] + X_3 + Z_2 + Y_1\}$

$5{,}000{,}000 \sum_{i=1} X_i + 50{,}000 \sum_{i=1} Y_i + 250{,}000 \sum_{i=1} Z_i \leq 100{,}000{,}000$

$X_1 \geq 0, \quad Y_1 \geq 0, \quad Z_1 \geq 0$

$i = 1,2,3$

Problema 3: Problema de producción.

Una empresa produce dos artículos que denominares A y B. La elaboración de una unidad de artículo A requiere de 20.00 de mano de obra y 10.00 del B. En cuanto a materia prima se requiere 10.00 para la unidad A y 30.00 para la B . El desgaste de equipo se supone proporcional a la producción y es de 5.00 para cada unidad del articulo A y 1.00 para el articulo B . la utilidad unitaria por articulo es 8.00 para A y 5.00 para B si se cuenta con un presupuesto de 100,000 .00 para salarios, 180,000 de materia prima y se quiere que el desgaste del equipo no exceda a 40,000.00 , ¿qué cantidad debe de producirse de cada artículo para obtener la máxima utilidad posible ?

	A ($/unidad)	B ($ /unidad)	Disponibilidad de Recursos
MANO DE OBRA	20	10	100,000
MATERIA PRIMA	10	30	180,000
DESGASTE DE EQUIPO	5	1	40,000
UTILIDAD	8	5	

Cuantos artículos A y B deben producirse para obtener la máxima utilidad posible.

Variables de decisión:

X1 = Numero de artículos del tipo A que deben producirse
X2 = Numero de artículos del tipo B que deben producirse

Utilidad = 8X1 + 5X2

Está sujeto a la siguiente restricciones:

$$20X1 + 10X2 \leq 100{,}000$$
$$10X1 + 30X2 \leq 180{,}000$$
$$5X1 + X2 \leq 40{,}000$$

$$X1 \geq 0 \;;\; X2 \geq 0$$

MAXIMIZAR U = 8X1 + 5X2
s.a

$20X1 + 10X2 \leq 100{,}000$ (mano de obra)
$10X1 + 30X2 \leq 180{,}000$ (materia prima)
$5X1 + X2 \leq 40{,}000$ (desgaste de equipo)

$X1 \geq 0 \;;\; X2 \geq 0$ (de no negatividad)

MAX U = f (X1, X2)
s.a. : un sistema de restricción.

PROBLEMA 4.- Una compañía de transporte posee dos tipos de camiones el tipo A cuenta con 20 m^3 de espacio refrigerado y 40 m^3 de espacio no refrigerado. El camión tipo B cuenta con 30 m^3 de espacio refrigerado como de no refrigerado. Una fábrica de productos alimenticios debe embarcar 900 m^3 de productos refrigerados y 1200 m^3 de productos no refrigerados. ¿Cuántos camiones de cada tipo debe de alquilar la fabrica para minimizar sus costos de embarque si el camión tipo A se alquila a razón de $ 30.00 el km y el B a razón de $ 40.00 el Km ?.

	TRASPORTE		REQUISITOS
PRODUCTOS	A (m^3)	B (m^3)	(m^3)
REFRIGERADO	20	30	900
NO REFRIGERADO	40	30	1200
COSTO/ KM	30	40	minimizar

VARIABLES DE DECISIÓN

X1= Número de camiones de tipo A
X2= Número de camiones de tipo B

Costo total por Km :

C = 30 X1 + 40X2 (función objetivo)

Restricciones:

$20X1+ 30X2 \geq 900$ (Espacio refrigerado)
$40X1+ 30X2 \geq 1200$ (no refrigerado)

$X1 \geq 0$; $X2 \geq 0$ (enteros)

Formulación:

MINIMIZAR C = 30 X1 + 40X2
sujeto a

$20X1+ 30X2 \geq 900$
$40X1+ 30X2 \geq 1200$

$X1 \geq 0$; $X2 \geq 0$ (enteros)

PROBLEMA 5.- Se dispone de un horno eléctrico para fundir hierro y producir fundiciones de hierro gris, la capacidad de dicho horno es de 2 tn. Diversos materiales dan un producto final que satisface las especificaciones siguientes:

Compuestos de hierro gris	% Min	% Max
Carbono	3.25	3.40
Silicio	2.05	2.25

MATERIALES DISPONIBLES

MATERIALES	% DE CARBONO	% DE SILICIO	COSTO/tn ($)
CHATARRA DE ACERO TIPO A	0.45	0.10	60
CHATARRA DE ACERO TIPO B	0.40	0.15	63
CHATARRA DE HIERRO COLADO	3.50	2.30	68
SOBRANTES DE FUNDICION	3.30	2.20	40
BRISQUETAS DE CARBONO	100	0	600
BRISQUETAS DE SILICIO	0	100	1000

Seleccionar la alimentación que satisfaga las especificaciones con un costo mínimo

VARIABLES DE DECISIÓN

X_j = Cantidad de material (tn)de tipo j ; que debe usarse para alimentar el horno

para j = 1,2,3,4,5y 6 costo por carga:

$C = 60 X_1 + 63X_2 + 68X_3 + 40X_4 + 600X_5 + 1000X_6$

restricciones:

1.- Contenido de carbono

$3.25 \leq 0.45 X_1 + 0.40 X_2 + 3.5X_3 + 3.3X_4 + 100X_5 \leq 3.4$

2.- Contenido de silicio:

$2.05 \leq 0.1 X_1 + 0.15 X_2 + 2.3 X_3 + 2.2 X_4 + 0X_5 + 100X_6 \leq 2.25$

3.- Capacidad del horno. Contenido de la carga.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 2$

$X_j \geq 0$ para toda j

Formulación

$$\text{Min } C = 60X1 + 63X2 + 68X3 + 40X4 + 600X5 + 1000X6$$

s.a

$$6.5 \leq 0.45X1 + 0.40X2 + 3.5X3 + 3.3X4 + 100X5 + 0X6 \leq 6.8$$

$$4.1 \leq 0.10X1 + 0.15X2 + 2.3X3 + 2.2X4 + 0X5 + 100X6 \leq 4.5$$

$$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 = 2$$

$Xj \geq 0$ para toda j = 1,2,3,4,5 y 6 .

PROBLEMA 6.

Un inversionista cuenta con 2 planes de inversión A y B disponibles en cada uno de los siguientes 5 años. Cada peso invertido en el plan A al inicio de un año retorna en 1.40 dos años después. cada peso invertido en el plan B al inicio de un año retorna en 1.70 tres años después.

Dos planes adicionales de inversión C y D están disponibles en el futuro. Cada peso invertido en el plan C a partir del segundo año, retorna en dos pesos cuatro años después. cada peso invertido en el plan D al inicio del quinto año retorna en 1.30 un año después.

El inversionista inicia con un capital de \$ 10,000.00 . ¿ Que programa de inversión maximiza la cantidad de dinero que el puede acumular al inicio del sexto año ? .

Variables de decisión:

Xij = cantidad de dinero invertido al plan i, al inicio del año j
donde i = A, B, C, D. y j = 1,2,3,4,5 y 6

año j / plan i	1	2	3	4	5
A	XA1	XA2	XA3	XA4	XA5
B	XB1	XB2	XB3	XB4	XB5
C	XC1	XC2	XC3	XC4	XC5
D	XD1	XD2	XD3	XD4	XD5

Variables de decisión: Xij

sea Z j = Disponibilidad de la inversión al inicio del año j = 1,2,3,4,5 y 6

Para el año1: $XA1 + XB1 \leq 10{,}000$ disponibilidad inicial = (Z1)
Para el año2: $XA2 + XB2 + XC2 \leq 10{,}000 - (XA1 + XB1) = (Z2)$
Para el año3: $XA3 + XB3 + XC3 \leq Z2 - (XA2 + XB2 + XC2) + 1.4\ XA1 = (Z3)$
Para el año4: $XA4 + XB4 + XC4 \leq Z3 - (XA3 + XB3 + XC3) + 1.4\ XA2 + 1.7\ XB1 = (Z4)$
Para el año5: $XA5 + XB5 + XC5 + XD5 \leq Z4 - (XA4 + XB4 + XC4) + 1.4\ XA3 + 1.7XB2 = (Z4)$
Para el año 6: $Z6 = Z5 - (XA5 + XB5 + XC5 + XD5) + 1.4\ XA4 + 1.7\ XB3 + 2\ XC2 + 1.3\ XD5$

Prob:

Maximizar Z6 = Z5- (XA5 + XB5 + XC5 + XD5) + 1.4XA4 + 1.7XB3 + 2XC2 + 1.3 XD5

Maximizar Z = Z6
sujeto a

XA1 + XB1 = 10,000 ....(1)
XA2 + XB2 + XC2 + XA1 + XB1 = 10,000..(2)
XA3 + XB3 + XC3 + XA1 + XB1 +XA2 + XB2 + XC2 - 1.4 XA1 = 10,000..(3)
XA4 + XB4 + XC4 +XA3 + XB3 + XC3 + XA1 + XB1 +XA2 + XB2 + XC2 - 1.4 XA1 - 1.4 XA2 -1.7 XB1 = 10,000...(4)

XA5 + XB5 + XC5 + XD5 + XA4 + XB4 + XC4 +XA3 + XB3 + XC3 + XA1 + XB1 +XA2 + XB2 + XC2 - 1.4 XA1 - 1.4 XA2 -1.7 XB1 -1 .4 XA3 -1.7 XB2 =10,000 ....(5)

Reduciendo :

XA1 + XB1 = 10,000 ....(1)
XA2 + XB2 + XC2 + XA1 + XB1 = 10,000..(2)
XA3 + XB3 + XC3 + XB1 +XA2 + XB2 + XC2 - 0.4 XA1 = 10,000..........(3)
XA4 + XB4 + XC4 +XA3 + XB3 + XC3 + XB2 + XC2 - 0.4 XA1 - 0.4 XA2 -0.7 XB1 = 10,000..(4)

XA5 + XB5 + XC5 + XD5 + XA4 + XB4 + XC4 + XB3 + XC3 + XC2 - 0.4 XA1 - 0.4 XA2 -0.7 XB1 -0 .4 XA3 -0.7 XB2 =10,000 ....(5)

PROBLEMA 7. Supóngase que el departamento de policía ha pronosticado la demanda de carros patrulla en la ciudad de México para el periodo que comienza a las 12 del medio ida del 31 de diciembre y termina a las 12 del medio ida del 1 de enero. Las 24 horas han sido divididas en periodos de 4 horas y la demanda tanto en carros patrulla como en personal motorizado (dos personas por patrulla) están dados a continuación:

PERIODO	HORA DEL DÍA	CARROS PATRULLA	PERSONAL MOTORIZADO
1	12-16	200	600
2	16-20	400	800
3	20-24	500	1000
4	24-04	600	1200
5	04-08	400	800
6	08-12	200	400

El personal motorizado sólo puede trabajar 8 horas consecutivas y se cuenta con un total de 4000 unidades. Formule un programa lineal que encuentre el número mínimo requerido para satisfacer la demanda en cada periodo de 4 horas.

Z = Total de policías requeridos

Habiendo X1 = N0 de policías que empiezan a trabajar al inicio del periodo y, (y= 1....,1)

Minimizar : $Z = X1 + X2+X3+ X4+X5+X6 = \sum_{I+1}^{6} XI$
s.a

$X1 + X2+X3+ X4+X5+X6 \leq 4000$ (ELEMENTOS DISPONIBLES)

$X1 + X2 \geq 600$
$X2 + X3 \geq 800$
$X4 + X4 \geq 1200$
$X5 + X6 \geq 800$
$+ X6 \geq 400$

$Xi \geq 0$ entera

PROBLEMA 8. Supóngase que el Banco Crédito al campesino tiene dos planes de inversión. a saber, el primero en el problema a tierras de riego y el segundo en el problema de tierras de temporal: El primer programa regresa un 30% de la inversión al final del año, mientras que el segundo plan regresa un 65% de la inversión, pero al término de dos años . Los intereses recibidos en ambos planes son reinvertidos de nuevo en cualquiera de ambos planes. Formule un programa lineal que le permita al banco maximizar la inversión total en un sexenio, si la inversión anual es de capital: $100,000.00

Tierra / Plan	Riego	Temporal
A	30% (1 AÑO)	------------------
B	------------------	65% (2 AÑOS)

AÑO / PLAN	1	2	3	4	5	6	
A RIEGO	AX1	AX2	AX3	AX4	AX5	AX6	
B TERPORAL	BX1	BX2	BX3	BX4	BX5	BX6	

1er. año $XA1 + XB1 \leq$ 100 MILLONES $= Z1$
2o . año $XA2 + XB2 \leq Z1 - (XA2+XB2) + 0.30\ XA1 = Z2$
3o. año $XA3 + XB3 \leq Z2 - (XA2+XB2) + 0.30\ XA2 + 0.65XB1 = Z3$
4o. año $XA4 + XB4 \leq Z3 - (XA3+XB3) + 0.30\ XA3 + 0.65XB2 = Z4$
5o. año $XA5 + XB5 \leq Z4 - (XA4+XB4) + 0.30\ XA4 + 0.65XB3 = Z5$
6o. año $XA6 + XB6 \leq Z5 - (XA5+XB5) + 0.30\ XA5 + 0.65XB4 = Z6$

FUNCIÓN OBJETIVO:

Maximizar: $Z= Z6 - (XA6 + XB6) + 0.30XA6+ 0.65XB5$
Variables : $Xij \geq 0$ para todo ij- Enteras

3.- La compañía Nacional Aérea ha adquirido 2 aviones tipo BOEING 747, 4 aviones DC-8 y 6 aviones DC-9. Se trata de programar el servicio de esos dos aviones a cubrir las 5 rutas que a continuación se muestran :

			Número de viajes redondos por día				
Tipo de avión	Capacidad en pasajeros	Número de aviones	México Nueva York	México Madrid	México Acapulco	México Tokio (Japón)	México Can Cun
B-747	350	2	2	2/3	3	1/2	2
DC-8	150	4	1	1/2	6	1/4	5
DC-9	110	6	1	0	8	0	7
Demanda diaria de pasajeros por ruta:			400	150	1500	115	300

La siguiente tabla da el costo de operaciones por vuelo redondo y el costo penal asociado a un asiento vacío:

Tipo de avión	México Nueva York	México Madrid	México Acapulco	México Tokio	México Cancún
B-747	100000	250000	20000	350000	35000
DC-8	80000	100000	10000	200000	18000
DC-9	60000	No opera	5000	No opera	12000
Costo penal por aciento vacio	3000	7000	500	10000	900000

Formule un problema lineal que le permita a la compañía aérea asignar aviones a rutas , tan que el costo total (De operaciones, más costos de oportunidad por asiento vacio) se minimicen y se atengan a la demanda diaria, disponibilidad de equipo y frecuencia de viajes redondos diarios por ruta .

Variables de decisión: Xij = No de aviones y asignados a la ruta j.

Ruta / Avión	1	2	3	4	5
A	XA1	XA2	XA3	XA4	XA5
B	XB1	XB2	XB3	XB4	XB5
C	XC1	XC2	XC3	XC4	XC5

Función Objetivo:

Minimizar Z:

Z= 1150000XA1 +	2700000 XA2+	195000XA3 +	38500000XA4+	350000XA5 +
350000 XB1 +	1210000 XB2+	85000XB3 +	1700000 XB4+	151000 XB5 +
30000 XC1 +	0XC2+	60000XC3+	0XC4+	111000XC5

-4630000

RESTRICCIONES:

Disponibilidad	XA1	+	XA2	+	XA3	+	XA4	+	XA5	$\leq$	2
de	XB1	+	XB2	+	XB3	+	XB4	+	XB5	$\leq$	4
equipo	XC1	+	XC2	+	XC3	+	XC4	+	XC5	$\leq$	6

Demanda	2(350 XA1)	+	150XB1	+	110XC1	$\geq$ 400
	3(350 XA2)	+	2(150XB2)	+	0 XC2	$\geq$ 180
diaria	3(350 XA3)	+	6(150XB3)	+	8(110XC3)	$\geq$ 1500
por	2(350 XA4)	+	4(150XB4)	+	0 XC4	$\geq$ 115
ruta	2(350 XA5)	+	5(150XB5)	+	7 (110XC5)	$\geq$ 300

Max U = 8X1 + 5X2

s.a

$$20X1 + 10X2 \leq 100\,000$$
$$10X1 + 30X2 \leq 180\,000$$
$$5X1 + 1X2 \leq 40\,000$$
$$X1, X2 \geq 0$$

Introduciendo variables de holgura se tiene:

Max U = 8X1 + 5X2

s.a

$$20X1 + 10X2 + X3 = 100\,000 \text{.......(1) M.O.}$$
$$10X1 + 30X2 + X4 = 180\,000 \text{.......(2) M.P.}$$
$$5X1 + 1X2 + X5 = 40\,000 \text{.......(3) Des}$$

Nuevo Problema:

Max $U' = 40000 + x_2 - 2/5\ X_3$
s.a

$$(-5)\ (-10)\ (-8)\ X_1 + ½\ X_2 + 1/20\ X_3 = 5000 \qquad (1)$$
$$25\ X_2 - ½\ X_3 + X_4 = 5000 \qquad (2)$$
$$-3/2\ X_2 - 1/4\ X_3 + X_4 + X_5 = 5000 \qquad (3)$$

DE 1 : $X_2 = 10000 - 2Z_1 - 1/10\ X_3$.................................(1)
DE 2 $X_2 = 5200 + 1/50X_3 - 1/25\ X_4$ ....(2)
DE 3: $X_2 = -1/6\ X_3 + 2/3X_5$ ------10000........................(3)

Cota superior de X2 cuando ($X_1 = X_2 = X_4 = X_5 = 0$)

$X_2 = 10000$
$X_2 = 5200$
$X_3 = -10000$

SE ELIGE EL VALOR QUE SATIOSFAGA LAS RESTRICCIONES ANTERIORES

SUS . (DE LA ECUACION 2 X2) X2 en las ecuaciones 1,2,3

$$U'' = 40000 + (5200 + 1/50\ x_3 - 1/25\ X_4) - 2/5\ X_3 =$$
$$= 45000 - 19/50\ x_3 - 1/25\ x_4$$

$$X_1 + 1/2\ (5200 + 1/50\ x_3 - 1/25\ X_4) + 2/5\ X_3 = 5000$$
$$X_1 + 6/100X_3 - 1/50\ X_4) = 5000 - 2600$$

$X_1 + 3/50\ X_3 - 1/50X_4 = 2400$ 1
de dos tenemos:

$$- 2/3 + (5200 + 1/50\ x_3 - 1/25\ X_4) - 1/4X_3 + X_5 = 15000$$
$$-7800 - 14/50\ X_3 + 3/50\ X_4 + X_5 = 15000$$
$$-14/50X_3 + 3/50X_4 + X_5 = 22800$$

NUESTRO PROBLEMA:

Max $U'' = 42500X_1 - 19/50X_3 - 1/25\ X_4$
s.a

$$X_1 + \quad +3/5\ X_3 - 1/50\ X_4 = 2400$$
$$X_2 \quad -1/50X_3 + 1/25\ X_4 = 5200$$
$$-14/50X_3 + 3/50\ X_4 + X_5 = 22800$$

U'' Obtiene su valor máximo cuando $x_3 = x_4 =$ cero

max $U'' = 45200$

$X_1 = 2400$
$X_2 = 5200$

solución óptima

Tenemos: tres granjas ; 3 cosechas, política de porcentaje de áreas sembradas.

Variables de decisión.

X_{ij} = Numero de áreas que deben plantarse en la granja Y (123) destinada al cultivo j (a,b,c)

Cultivo / Granja	A	B	C
1	X_{1A}	X_{1B}	X_{1C}
2	X_{2A}	X_{2B}	X_{2C}
3	X_{3A}	X_{3B}	X_{3C}

Función de dualidad:

Maximizar: $U'' = Z = 400\overbrace{(X_{1A} + X_{2A} + X_{3A})}^{\text{Áreas que deben sembrarse en la cosecha A}} + 300(X_{1B} + X_{2B} + X_{3B}) + 100(X_{1C} + X_{2C} + X_{3C})$

Restricciones

1.- Uso de acres an cada granja

granja 1: $X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} \leq 400$ Areas que tiene aproÁechables
granja 2: $X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} \leq 600$
granja 3: $X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} \leq 300$

2.- Disponibilidad de agua que tiene cada granja

granja 1: $5X_{1A} + 4X_{2A} + 3X_{3A} \leq 1500$
granja 2: $5X_{1B} + 4X_{2B} + 3X_{3B} \leq 2000$
granja 3: $5X_{1C} + 4X_{2C} + 3X_{3C} \leq 900$

3.- Disponibilidad de áreas.

granja 1: $X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} \leq 700$ Acreaje máximo por cosecha.
granja 2: $X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} \leq 800$
granja 3: $X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} \leq 300$

4.- Política de uniformidad de áreas de trabajo.

granja 1: granja 2: granja 3:

$$\frac{X_{1A} + X_{1B} + X_{1C}}{400} = \frac{X_{2A} + X_{2B} + X_{2C}}{600} = \frac{X_{3A} + X_{3B} + X_{3C}}{300} = 0$$

$X_{ij} \geq 0$ para todo i,j

PROBLEMA 9:

Cierta organización agrícola opera tres granjas de cooperable productividad. El rendimiento de cada granja está limitado por la cantidad de áreas de tierra aprovechable y por la cantidad de agua disponible de acuerdo a la siguiente tabla:

Granja	Áreas de tierra aprovechables	Agua disponible en pies de área
1	400	1500
2	600	2000
3	300	900

La organización esta considerando tres cosechas los costos difieren tanto en ganancia esperada porque como en el consumo de agua. Además, el acreaje total puede ser dedicado a cada uno de las cosechas y está limitado por la cantidad de eventos de eventos desacuerdo a la siguiente tabla:

Cultivo Tipo	Acreaje Máximo	Consumo de agua en pies de acreaje por área	Ganancia esperada por acreaje ($)
A	700	5	400
B	800	4	300
C	300	3	100

Para mostrar una carga uniforme de trabajo entre las granjas es política de la organización el que el porcentaje de áreas planteadas sea el mismo para cada granja, la organización espera conocer que cantidad de cada cosecha debe ser plantada en su respectiva granja de tal forma que maximicen la utilidad esperada.

EL MÉTODO SIMPLEX Y EL MÉTODO DUAL-SIMPLEX.

Formas equivalentes. Forma Canónica :

Max Z = C X

S. A:

$$A X \leq b$$
$$X \geq 0$$

1. Max Z = Min (-Z)
   Min Z = Max (-Z)

2. $A x \leq b \Rightarrow -A x \geq -b$
   $A x \geq b \Rightarrow -A x \leq -b$

3. $\{A x = b\} = \{A x <= b\} \cap \{A x \geq b\}$

4. $Ax \leq b \Rightarrow Ax+y=b$; y= vector de holgura

5. $Ax \geq b \Rightarrow Ax-z=b$; z= vector superfluo

6. Si Xj <= 0 , Xk = -Xj >= 0

7. Si Xj es no restringida con signo ($\leq$, =, $\geq$), ésta puede expresarse en función de dos variables positivas.

8. $5X2 + 8X3 \leq 100$

equivale a : $5X2 + 8X3 \leq 100$ y $5X2 + 8X3 \geq -100$

Considere el siguiente problema lineal y escríbalo en forma canónica

$$\textit{Min } Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

S. A:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 - 2x_2 = 7$$

$$x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ no restringida}$$

Forma Canónica:

$$\textit{Max } H = -Z = -2x_1 + 3x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \quad ; \quad Z = H$$

S. A:

$$-x_1 - x_2 - (x_3^+ - x_3^-) \leq -1$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 7$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq -7$$

$$-x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0, \quad x_3^+ >= 0 \text{ y } x_3^- >= 0$$

EJEMPLO: MINIMIZAR $X_o = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3$

S.A

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 40$$
$$X_1 + 9X_2 - 7X_3 \leq 50$$
$$5X_1 + 3X_2 = 20$$
$$\left| 5X_2 + 8X_3 \right| \leq 100$$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Irrestricta en signo

En la función canónica

$$\left| 5X_2 + 8X_3 \right| \leq 100$$

equivale a : $5X_2 + 8X_3 \leq 100$ y $5X_2 + 8X_3 \geq -100$

$$X_3 = X_3^{+} - X_3^{-}$$

DONDE $X_3^{+} \geq 0$ Y $X_3^{-} \geq 0$

Transformando la función objetivo a maximización:

$$\text{Max } G_o = (-X_o) = -3X_1 + 3X_2 - 7(X_3^{+} - X_3^{-})$$

$$X_1 + X_2 + 3(X_3^{+} - X_3^{-}) \leq 40$$
$$-X_1 - 9X_2 + 7(X_3^{+} - X_3^{-}) \leq -50$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 20$$
$$5X_2 + 8(X_3^{+} - X_3^{-}) \leq 100$$
$$-5X_2 - 8(X_3^{+} - X_3^{-}) \leq 100$$
$$-X_2 - 8(X_3^{+} - X_3^{-}) \leq 100$$

$$X_1, X_2, \geq 0, \quad X_3^{+}, X_3^{-} \geq 0$$

PROBLEMA 10: Min $Z = -3X1 + 5X2$

S.A

$$\begin{aligned} X1 \quad & \leq 4 \\ X2 \quad & \leq 6 \\ 3X1 + 2X2 \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

MIN $Z = -3X1 + 5X2$

S.A

$X1 + X3 = 4$ 1 VARIABLES DE HOLGURA*

$X2 + X4 = 6$ 2 VARIABLES DE HOLGURA*

$3X1+2X2 - X5 = 18$ 3 VARIABLES DE HOLGURA*

* DE acuerdo al tipo de desigualdad

Se le agrega una variable artificial a la ecuación 3

Min $Z = -3x1 + 5x2 + MW1$

s.a

$$\begin{aligned} X1 + X3 &= 4 \\ X2 + X4 &= 6 \\ 3X1 + 2X2 - X5 + W1 &= 18 \end{aligned}$$

Max $(-Z)$ = Max $H = 3X1 - 5X2 - MW1$

S.A

$$\begin{aligned} X1 + X3 &= 4 \\ X2 + X4 &= 6 \\ 3X1 + 2X2 - X5 + W1 &= 18 \end{aligned}$$

PROBLEMA 11: RESUELVA POR EL MÉTODO SIMPLEX

MAX Z = 2X1 + X2 - X3 + 5X4

S.A

-X1 - X2 - X3 + 7X4 ≥ -46 1

-3/2X1 -1/2 X2 -1/2X3 + X4 ≤ 4 2

4X1 + 6X2 - 2X3 + 2X4 ≤ 20 3

X1,X2,X3,X4 ≥ 0

INTRODUCIENDO VARIABLES DE HOLGURA DESPUÉS DE CAMBIAR EL SENTIDO DE 1

Z - 2X1 + X2 + X3 -5X4 + 0 + 0 + 0 = 0

X1 + 7X2 + 3X3 -7X4 + X5 + 0 + 0 = 46

3/2X1 -1/2X2 +1/2X3 - X4 + 0 + X6 + 0 = 4

- 4X1 + 6X2 - 2X3 -2X4 + 0 + 0 + X7 = 20

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7		
	1	-2	-1	1	-5	0	0	0	0	
X5	0	1	7	3	-7	1	0	0	46	
X6	0	3/2	-1/2	1/2	1	0	1	0	4	4
X7	0	4	6	-2	2	0	0	1	20	10

	1	11/2	-7/2	7/2	0	0	5	0	20	
X5	0	23/2	7/2	13/2	0	1	7	0	74	259
X4	0	3/2	-1/2	1/2	1	0	1	0	4	
X7	0	1	7	-3	0	0	-2	1	12	1.7

	1	6	0	2	0	0	4	1/2	26	
X5	0	11	0	8	0	1	8	-1/2	68	13.6
X4	0	11/7	0	2/7	1	0	6/7	1/14	34/7	17
X2	0	1/7	1	-3/7	0	0	-2/7	1/7	12/7	

	1	13/4	0	0	0	-1/4	2	9/8	9	
X3	0	11/8	0	1	0	1/8		-1/16	17/2	68/11
X4	0	33/28	0	0	1	-1/28	4/7	5/56	61/7	1708/231
X2	0	41/56	1	0	0	3/56	1/7	13/112	75/14	1600/287

$$MIN\ Z = 2(-X4) -3X2 + 4 (X5 -X6)$$
S.A

$-X4 + X2 + 8\ X5 - X6) \geq 0$
$-X4 -2X2 = 7$

$X2,X4,X5,X6 \geq 0$

$MAX\ H = -Z = 2X4 + 3X2 - 4X5 + 4X6$
S.A

$X4 - X2 - X5 + X6 \leq -1$
$-X4 - 2X2 \leq 7$
$X4 - 2X2 \leq -7$

$X2,X4,X5,X6 \geq 0$

PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN

Un planteamiento de un problema trivial:

$$\boldsymbol{Min\ Z = cX}$$

s. a:

$AX <= b$
$X >= 0$, $b >= 0$ ***la solución óptima será no hacer nada***

Un problema de minimización interesante será:

$$\boldsymbol{Min\ Z = cX}$$

s. a:

$AX \geq b$
$X \geq 0$

Problema 12:

$$\boldsymbol{Min\ Z = -3x_1 + 5x_2}$$

s. a:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad & \leq 4 \\ x_2 & \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 \ ,\ x_2 \geq 0$$

Convirtiendo el problema anterior y resolviendo por el método símplex:

$$\textbf{\textit{Max h = -Z = 3x}}_{\mathbf{1}} \textbf{\textit{ - 5x}}_{\mathbf{2}}$$

s.a:

$$\begin{array}{rcr} x_1 & \leq & 4 \\ x_2 & \leq & 6 \\ -3x_1 - 2x_2 & \leq & -18 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

y conformando el tableau:

	h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	-3	5	0	0	0	0
a_3	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	o	1	0	1	0	6
a_5	0	-3	-2	0	0	1	-18

La solución básica X_B que se tiene es:

$$X_B = \left\{ \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ -18 \end{array} \right\}$$

$$X_N = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

Esta solución no es factible ya que $x_5 = -18 < 0$
El método simples para problemas no triviales no trabaja.

MÉTODO DE PENALIZACIÓN

I ***Min Z = C X***

S. A:

$$A\,x \geq b$$

$$x \geq 0$$

Introduciendo variables superfluas:

Min Z = C X

S. A:

$$A\,x - y = b$$

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

Agregando variables artificiales se tiene:

II $\quad$ ***Min Z = C X + MW***

S. A:

$$A x - y + w = b$$

$$M >> 0$$

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

La solución del problema II es solución del problema I cuando w = 0

MÉTODO DE DOBLE FASE

Min Z = C X

S. A:

$$A x \geq b$$
$$x \geq 0$$

Se introducen variables superfluas y artificiales como en el método de penalización.

El método de doble fase consiste en:

$$\text{Min } Z = \begin{cases} w = \Sigma \; wj & \text{(1a. fase)} \\ cx & \text{(2a. Fase)} \end{cases}$$

S. A:

$$A x - y + w = b$$
$$x , y , w >= 0$$

La solución óptima de la primera fase será con w=0, si al obtener la optimalidad, w>0, el problema original no tiene solución.

1a. Fase:

$$\text{Min } w = \Sigma \; wj$$

S. A:

$$A x - y + w = b$$

$$x , y , w >= 0$$

Solución óptima si w = 0 ; " B " = base óptima

2a. Fase:

$$\text{Min } Z = C X$$

S. A:

$$B^{-1} A x - B^{-1} y = B^{-1} b$$

donde B es base óptima de la primera fase

$$x , y , \geq 0$$

La solución óptima de la segunda fase corresponde a la solución del problema
Considere el siguiente problema lineal y escríbalo en forma canónica

Problema 13:

$$\textbf{\textit{Min } } Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

S. A:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 7 \end{aligned}$$

$$x_1 \leq 0 , \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ no restringida}$$

Forma Canónica:

$$\text{Max } H = -Z = -2x_1 + 3x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \quad ; \quad Z = H$$

S. A:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - (x_3^+ - x_3^-) &\leq -1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq -7 \end{aligned}$$

$$-x_1 >= 0 , \quad x_2 >= 0 , \quad x_3^+ >= 0 \text{ y } x_3^- >= 0$$

Forma Canónica:

$$\textbf{Max } H = -Z = -2x_1 + 3x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \quad ; \quad Z = H$$

S. A:

$$\begin{aligned}
-x_1 - x_2 - (x_3^+ - x_3^-) &\leq -1 \\
x_1 - 2x_2 &\leq 7 \\
-x_1 + 2x_2 &\leq -7
\end{aligned}$$

$-x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$, $x_3^+ >= 0$ y $x_3^- >= 0$

Max h = -Z = -X1 -X2

S.A

$$\begin{aligned}
-3X1 - X2 + X3 &= -3 \\
-4X1 - 3X2 + X4 &= -6 \\
-3X1 - 2X2 \quad X5 &= -3
\end{aligned}$$

X1,X2,X3,X4,X5 ≥ 0

	h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	2	1	0	0	0	0
a_3	0	-3	-1	1	0	0	-3
a_4	0	-4	-3	0	1	0	-6
a_5	0	-1	-2	0	0	1	-3

	h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	2/3	0	0	1/3	0	-2
a_3	0	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
a_4	0	4/3	1	0	-1/3	0	2
a_5	0	5/3	0	0	-2/3	1	1

$$\text{MAX}\left(\frac{2/3}{-5/3} \quad \frac{1/3}{-1/3}\right) =$$

MAX (-0.4, - 1.0) = -4,

	h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0	0	2/5	1/5	0	-12/5
a_3	0	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
a_4	0	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
a_5	0	0	0	1	-1	1	0

La solucion optima es :

$$X = \begin{pmatrix} XB \\ \hline XN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X5 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 6/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y

h= -Z = -12/5,

por lo que

Z = 12/5